تحلیل الگوریتم‌ها

سید ناصر رضوی
www.snrazavi.ir
۱۳۹۵

دلایل تحلیل الگوریتم‌ها

- دلایل تحلیل الگوریتم‌ها.
  - پیش‌بینی کارایی
  - مقایسه‌ی الگوریتم‌ها
  - تضمین کارایی

- دلیل عملی.
  - اجتناب از خطاهای کارایی

چالش

- آیا برنامه‌ی من می‌تواند یک مسئله با اندازه‌ی ورودی بزرگ را حل کند؟

- نکته‌ی اصلی. [کنوث دهه ۷۰] برای درک کارایی از روش علمی استفاده کنید.

استفاده از روش علمی برای تحلیل الگوریتم‌ها

- یک چارچوب به منظور پیش‌بینی کارایی و مقایسه‌ی الگوریتم‌ها.
- روش علمی (مشاهده-فرضیه-آزمون).
  - مشاهده‌ی یک ویژگی از دنیای طبیعی
  - فرضیه‌پردازی بر اساس مشاهدات انجام شده
  - پیش‌بینی رویدادهای آتی با استفاده از فرضیه
  - تصدیق فرضیه با انجام مشاهدات بیشتر
  - اعتبارسنجی با تکرار مراحل فوق تا زمانی که فرضیه و مشاهدات با یکدیگر همخوانی پیدا کنند.
- اصول.
  - آزمایش‌ها باید تکرارپذیر باشند.
  - فرضیه‌ها باید انکارپذیر باشند.

مشاهدات

مثال: مسئله‌ی ۳-مجموع

- ۳-مجموع. با داشتن **N** عدد صحیح متمایز، چند سه‌تایی وجود دارد که مجموع‌شان دقیقاً برابر با صفر است؟

```
% more 8ints.txt
8
30 -40 -20 -10 40 0 10 5

% java ThreeSum 8ints.txt
4
```

	a[i]	a[j]	a[k]	sum
1	30	-40	10	0
2	30	-20	-10	0
3	-40	40	0	0
4	-10	0	10	0

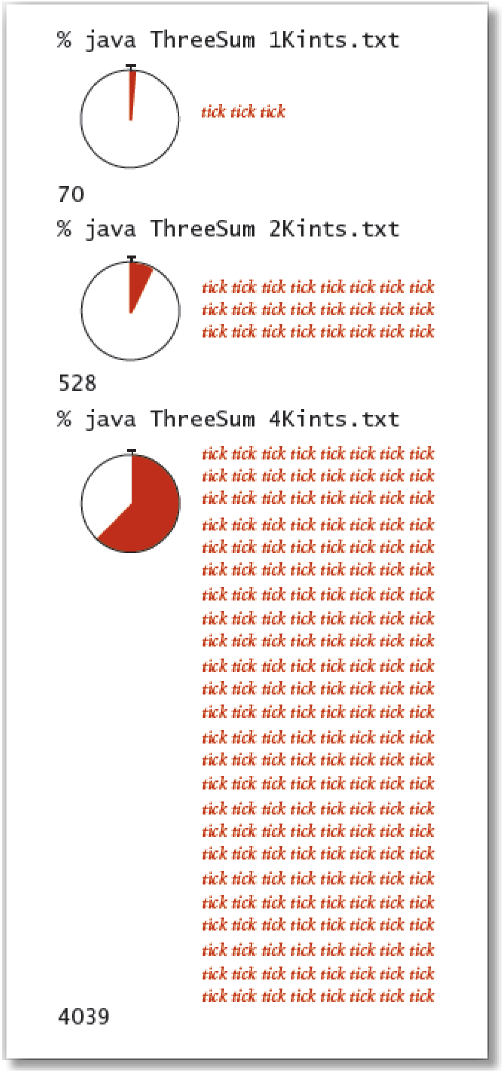
۳-مجموع: الگوریتم کورکورانه


```
public class ThreeSum
{
   public static int count(int[] a)
   {
      int N = a.length;
      int count = 0;

      for (int i = 0; i < N; i++)
         for (int j = i + 1; j < N; j++)
            for (int k = j + 1; k < N; k++)
               if (a[i] + a[j] + a[k] == 0)
                  count++;

      return count;
   }

   public static void main(String[] args)
   {
      int[] a = In.readInts(args[0]);
      StdOut.println(count(a));
   }
}
```

بررسی تمام سه‌تایی‌ها

اندازه‌گیری زمان اجرا

- س. چگونه زمان اجرای یک برنامه را اندازه بگیریم؟
- ج. به صورت دستی



اندازه‌گیری زمان اجرا

- س. چگونه زمان اجرای یک برنامه را اندازه بگیریم؟
- ج. به صورت خودکار

public class Stopwatch	
Stopwatch()	ایجاد یک شیء زمان‌سنج
double elapsedTime()	زمان سپری شده از لحظه‌ی ایجاد (برحسب ثانیه)

```
public static void main(String[] args)
{
   int[] a = In.readInts(args[0]);
   Stopwatch timer = new Stopwatch();
   StdOut.println(ThreeSum.count(a));
   double time = timer.elapsedTime();
}
```

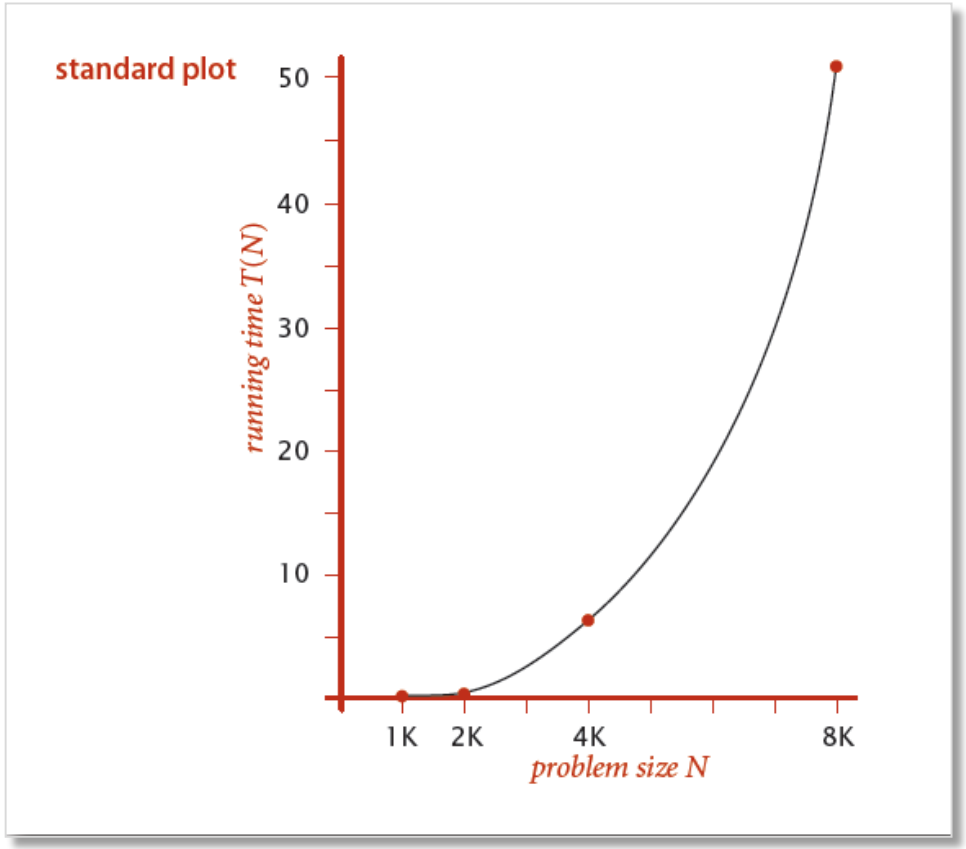
تحلیل تجربی

- مشاهده. برنامه را به ازای اندازه‌های مختلف ورودی اجرا کنید و زمان اجرا را اندازه بگیرید.

N	time (seconds)
250	0.0
500	0.0
1,000	0.1
2,000	0.8
4,000	6.4
8,000	51.1
16,000	?

تحلیل داده‌ها

- نمودار استاندارد. نمودار زمان اجرای **T (N)** برحسب اندازه‌ی ورودی **N**.



تحلیل داده‌ها

- نموار **log-log**. نمودار زمان اجرا برحسب اندازه ورودی در مقیاس **log-log**.

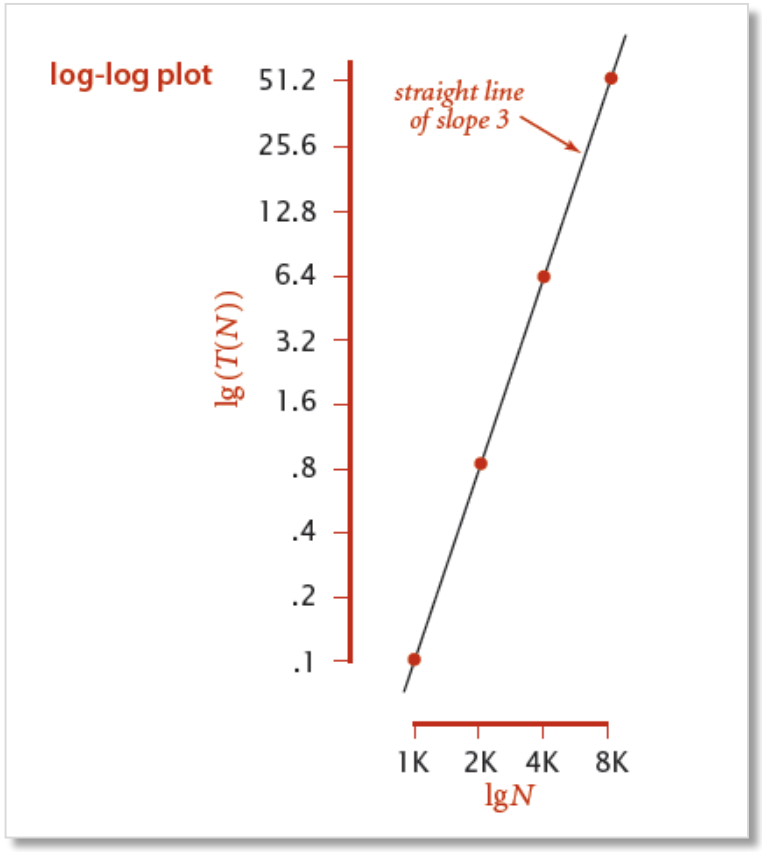
$$\lg(T(N)) = b \lg N + c$$

$$b = 2.999$$

$$c = -33.2103$$

$$T(N) = aN^b, \qquad a = 2^c$$

$$T(N) = 1.006 \times 10^{-10} N^{2.999}$$



پیش‌بینی و اعتبارسنجی

- فرضیه. زمان اجرا تقریباً برابر است با $۱/۰۰۶ \times ۱۰^{-۱۰} \times N^{۲.۹۹۹}$ ثانیه.

- پیش‌بینی.
  - ۵۱/۰ ثانیه برای N = ۸۰۰۰
  - ۴۰۸/۱ ثانیه برای N = ۱۶۰۰۰

- مشاهدات.
  - اجرای الگوریتم

N	time (seconds)
8,000	51.1
16,000	410.8

مشاهدات جدید با پیش‌بینی‌های انجام شده سازگار است!

آزمون دو برابر کردن

- آزمون دو برابر کردن. یک روش سریع به منظور تخمین **b**
- برنامه را به دفعات اجرا و هر بار اندازه‌ی ورودی را دو برابر کن.

N	time (seconds)	ratio	lg ratio
250	0.0	-	-
500	0.0	4.8	2.3
1,000	0.1	6.9	2.8
2,000	0.8	7.7	2.9
4,000	6.4	8.0	3.0
8,000	?	8.0	3.0

همگرا شدن به مقدار ثابت **b**

آزمون دو برابر کردن

- آزمون دو برابر کردن. یک روش سریع به منظور تخمین **b**.
- س. مقدار **a** را چگونه تخمین بزنیم؟
- ج. برنامه را برای یک ورودی بزرگ اجرا کن و معادله‌ی حاصل را برای به دست آوردن **a** حل کن.

N	time (seconds)
8,000	51.1
16,000	410.8

$51.1 = a \times 8000^3$

$\Longrightarrow a = 0.998 \times 10^{-10}$

$$T(N) = 0.998 \times 10^{-10}\, N^3$$

تحلیل الگوریتم‌ها به وسیله‌ی آزمایش

- عوامل مستقل از سیستم.
  - الگوریتم
  - داده‌های ورودی

تعیین کننده توان **b** در قاعده توانی

- عوامل وابسته به سیستم.
  - سخت‌افزار: پردازنده، حافظه، کش
  - نرم‌افزار: کامپایلر، مفسر، زباله جمع‌کن
  - سیستم: سیستم عامل، شبکه، برنامه‌های دیگر

تعیین کننده ثابت **a** در قاعده توانی

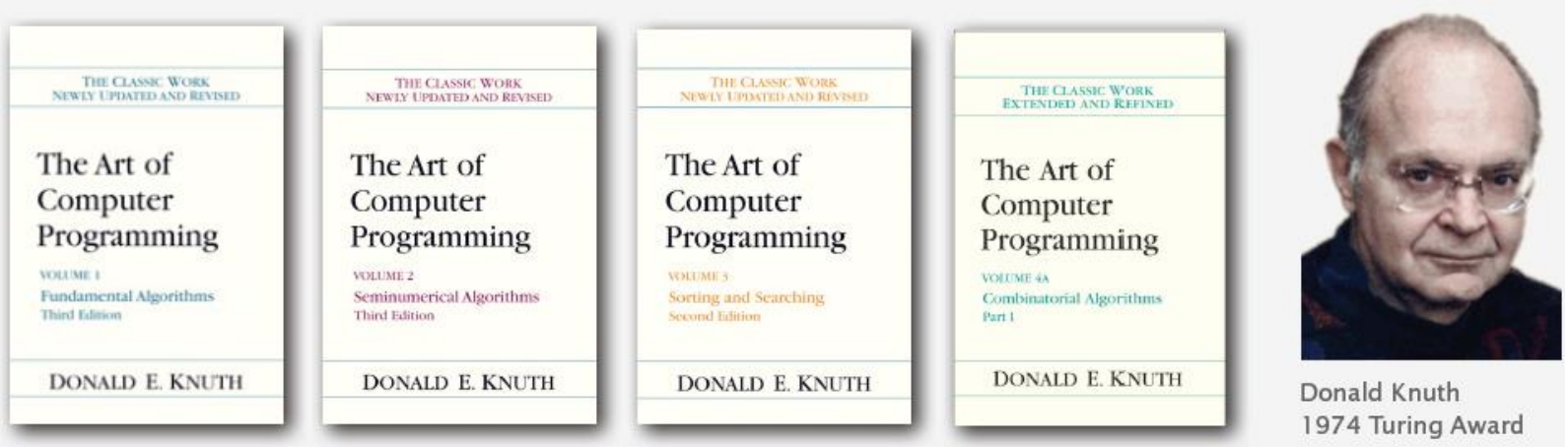
- اخبار بد. عوامل وابسته به سیستم اندازه‌گیری دقیق کارایی را مشکل می‌سازند.
- اخبار خوب. استفاده از روش علمی در تحلیل الگوریتم‌ها در مقایسه با علوم دیگر بسیار ساده‌تر و ارزان‌تر است.

مثلا توانایی انجام تعداد بسیار زیادی از آزمایش‌ها

مدل‌های ریاضی

مدل‌های ریاضی برای زمان اجرا

- زمان اجرای کل: مجموع هزینه × فراوانی به ازای همه‌ی عملیات.
  - نیاز به تحلیل برنامه به منظور تعیین مجموعه عملیات
  - هزینه به ماشین و کامپایلر بستگی دارد.
  - فراوانی به الگوریتم و داده‌های ورودی بستگی دارد.



- به لحاظ اصولی، مدل‌های دقیق ریاضی قابل دسترسی هستند.

هزینه‌ی عملیات ابتدایی

عمل	مثال	زمان (نانو ثانیه)
جمع اعداد صحیح	`a + b`	۲/۱
ضرب اعداد صحیح	`a * b`	۲/۴
تقسیم اعداد صحیح	`a / b`	۵/۴
جمع اعداد اعشاری	`a + b`	۴/۶
ضرب اعداد اعشاری	`a * b`	۴/۲
تقسیم اعداد اعشاری	`a / b`	۱۳/۵
محاسبه‌ی سینوس	`Math.sin(theta)`	۹۱/۳
محاسبه‌ی آرک تانژانت	`Math.atan2(y, x)`	۱۲۹/۰
...	...	...

یک کامپیوتر شخصی با سیستم عامل ویندوز ۷ و یک پردازنده ۲/۲ گیگا هرتزی و ۲ گیگا بایت حافظه

هزینه‌ی عملیات ابتدایی

عمل	مثال	زمان (نانو ثانیه)
اعلان متغیر	`int a`	c_1
انتساب	`a = b`	c_2
مقایسه‌ی اعداد صحیح	`a < b`	c_3
دستیابی به یک عنصر آرایه	`a[i]`	c_4
طول آرایه	`a.length`	c_5
تخصیص آرایه‌ی یک بعدی	`new int[N]`	c_6 N
تخصیص آرایه‌ی دو بعدی	`new int[N][N]`	c_7 N^2
طول رشته	`s.length()`	c_8
استخراج زیررشته	`s.substring(N/2,N)`	c_9
اتصال دو رشته	`s + t`	c_{10} N

مثال: ۱-مجموع

- س. تعداد دستورالعمل‌ها برحسب اندازه‌ی ورودی **N** چیست؟

```
int count = 0;
for (int i = 0; i < N; i++)
   if (a[i] == 0)
      count++;
```

عمل	فراوانی
اعلان متغیر	2
انتساب	2
مقایسه (کوچک‌تر)	N + 1
مقایسه (مساوی)	N
دستیابی به عنصر آرایه	N
افزایش	N to 2N

مثال: ۲-مجموع

□ س. تعداد دستورالعمل‌ها برحسب اندازه‌ی ورودی **N** چیست؟

```
int count = 0;
for (int i = 0; i < N; i++)
   for (int j = i + 1; j < N; j++)
      if (a[i] + a[j] == 0)
         count++;
```

عمل	فراوانی
اعلان متغیر	N + 2
انتساب	N + 2
مقایسه (کوچک‌تر)	½(N + 1)(N + 2)
جمع صحیح	½ N(N − 1)
مقایسه (مساوی)	½ N(N − 1)
دستیابی به یک عنصر آرایه	N(N − 1)
افزایش	½ N(N − 1) to N(N − 1)

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (N-1) = {}^{1}/_{2}\, N(N-1)$$

$$= \binom{N}{2}$$

ساده‌سازی ۱: مدل هزینه

- مدل هزینه. استفاده از یک عمل ابتدایی به عنوان عمل اصلی به منظور تقریب زمان اجرا.

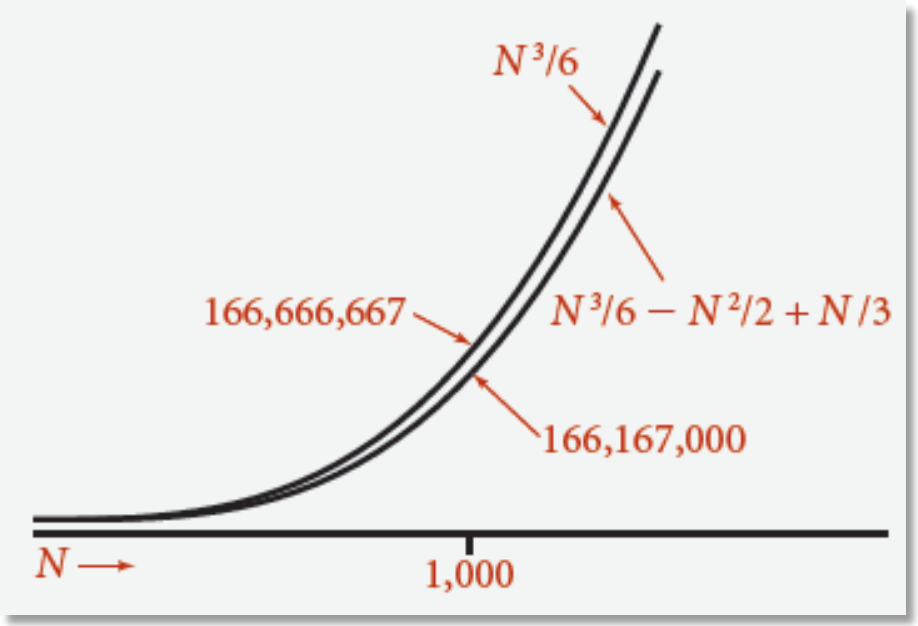
```
int count = 0;
for (int i = 0; i < N; i++)
   for (int j = i + 1; j < N; j++)
      if (a[i] + a[j] == 0)
         count++;
```

عمل	فراوانی
اعلان متغیر	N + 2
انتساب	N + 2
مقایسه (کوچک‌تر)	½(N + 1)(N + 2)
جمع صحیح	½ N(N − 1)
مقایسه (مساوی)	½ N(N − 1)
دستیابی به یک عنصر آرایه	**N(N − 1)**
افزایش	½ N(N − 1) to N(N − 1)

عمل اصلی: دستیابی به عناصر آرایه

ساده‌سازی ۲: نماد تیلدا

- تخمین زمان اجرا (یا حافظه) به عنوان تابعی از اندازه‌ی ورودی.
- نادیده گرفتن جملات مرتبه پایین‌تر.
  - برای **N** های بزرگ، قابل چشم‌پوشی است.
  - برای **N** های کوچک، اهمیت نمی‌دهیم.



$1/6\ N^3 + 20N + 16 \sim 1/6\ N^3$

$1/6\ N^3 + 100N^{4/3} + 56 \sim 1/6\ N^3$

$1/6\ N^3 - 1/2\ N^2 + 1/3\ N \sim 1/6\ N^3$

تعریف رسمی. $f(N) \sim g(N)$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{f(N)}{g(N)} = 1$

ساده سازی ۲: نماد تیلدا

- تخمین زمان اجرا (یا حافظه) به عنوان تابعی از اندازه‌ی ورودی.
- نادیده گرفتن جملات مرتبه پایین‌تر.
  - برای **N** های بزرگ، قابل چشم‌پوشی است.
  - برای **N** های کوچک، اهمیت نمی‌دهیم.

عمل	فراوانی	نماد تیلدا
اعلان متغیر	`N + 2`	`~ N`
انتساب	`N + 2`	`~ N`
مقایسه (کوچک‌تر)	`½(N + 1) (N + 2)`	`~ ½ N²`
جمع صحیح	`½ N(N - 1)`	`~ ½ N²`
مقایسه (مساوی)	`½ N(N - 1)`	`~ ½ N²`
دستیابی به یک عنصر آرایه	`N(N - 1)`	`~ N²`
افزایش	`½ N(N - 1) to N(N - 1)`	`~ ½ N² to ~ N²`

مثال: ۲-مجموع

- س. تعداد تقریبی دستیابی‌ها به عناصر آرایه به صورت تابعی از اندازه‌ی ورودی **N**؟

```
int count = 0;
for (int i = 0; i < N; i++)
   for (int j = i + 1; j < N; j++)
      if (a[i] + a[j] == 0)
         count++;
```

حلقه‌ی درونی

- ج. دسترسی به آرایه **~N^2**

$$\binom{N}{2} = {}^1/_2\, N(N-1) \sim {}^1/_2\, N^2$$

- خلاصه. از مدل هزینه و نماد تیلدا برای ساده‌سازی شمارش فراوانی استفاده کنید.

مثال: ۲-مجموع

- س. تعداد تقریبی دستیابی‌ها به عناصر آرایه به صورت تابعی از اندازه‌ی ورودی **N**؟

```
int count = 0;
for (int i = 0; i < N; i++)
   for (int j = i + 1; j < N; j++)
      for (int k = j + 1; k < N; k++)
         if (a[i] + a[j] + a[k] == 0)
            count++;
```

حلقه‌ی درونی

- ج. **~1/2 N^3** دسترسی به آرایه

$$\binom{N}{3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \sim {}^{1}/_{6}\, N^3$$

- خلاصه. از مدل هزینه و نماد تیلدا برای ساده‌سازی شمارش فراوانی استفاده کنید.

تخمین یک مجموع گسسته

- س. چگونه می‌توان یک مجموع گسسته را تخمین زد؟
- ج. مجموع را با یک انتگرال جایگزین کنید.

$1 + 2 + \cdots + N.$

$$\sum_{i=1}^{N} i \cong \int_{x=1}^{N} x dx \sim \frac{1}{2} N^2$$

$1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/N\,.$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \cong \int_{x=1}^{N} \frac{1}{x} dx = \ln N$$

$3 - sum.$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} \sum_{k=j}^{N} 1 \cong \int_{x=1}^{N} \int_{y=x}^{N} \int_{z=y}^{N} dz\, dy\, dx \sim \frac{1}{6} N^3$$

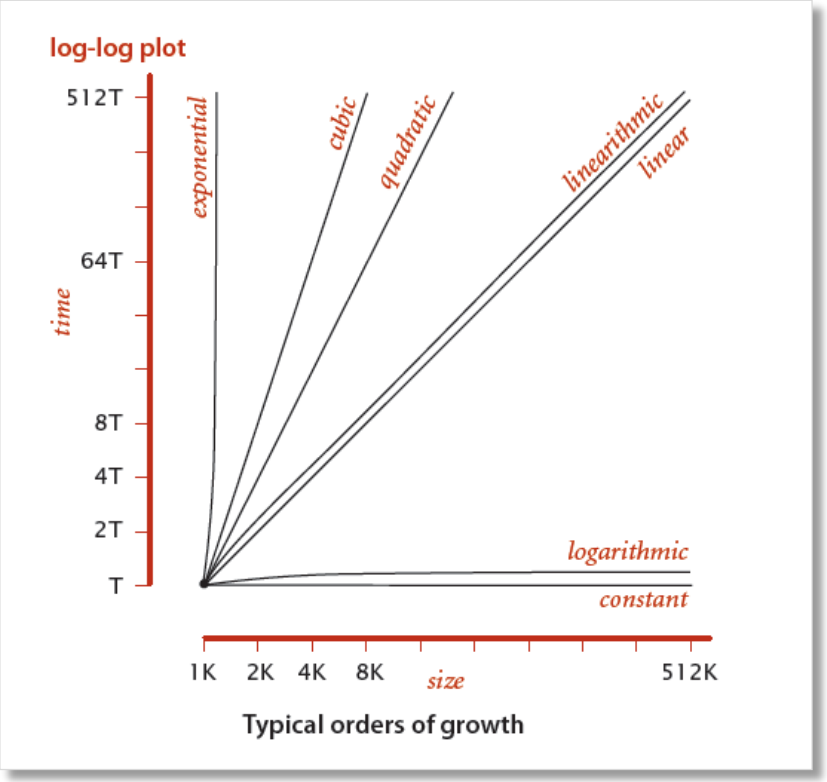
نرخ رشد

دسته‌بندی نرخ رشد الگوریتم‌ها

- اخبار خوب. یک مجموعه‌ی کوچک از توابع مانند زیر

$$1,\ \log N,\ N,\ N \log N,\ N^2,\ N^3,\ 2^N$$

برای توصیف نرخ رشد اغلب الگوریتم‌ها کفایت می‌کند.



Typical orders of growth

دسته‌بندی نرخ رشد الگوریتم‌ها

مرتبه رشد	نام	یک کد مثالی	مثال	T (2N) / T (N)
1	ثابت	`a = b + c`	جمع دو عدد	1
log N	لگاریتمی	`while (N > 1) { N = N / 2; ... }`	جستجوی دودویی	~1
N	خطی	`for (int i = 0; i < N; i++) { ... }`	یافتن بیشینه	2
N log N	خطی لگاریتمی	مرتب‌سازی ادغامی [با ما باشید]	مرتب‌سازی ادغامی	~2
N^2	درجه دو	`for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) { ... }`	دو حلقه‌ی تو در تو	4
N^3	درجه سه	`for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) for (int k = 0; k < N; k++) { ... }`	سه حلقه‌ی تو در تو	8
2^N	نمایی	برج های هانوی	جستجوی کامل	T (N)

مقایسه‌ی نرخ رشد توابع مختلف

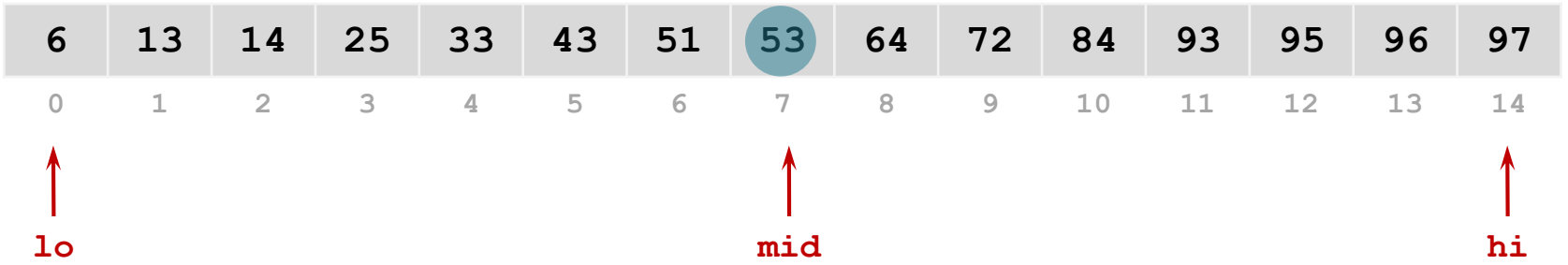
نرخ رشد	بزرگ‌ترین مسئله‌ی قابل حل در چند دقیقه			
	دهه‌ی ۷۰	دهه‌ی ۸۰	دهه‌ی ۹۰	۲۰۰۰ به بعد
1	هر	هر	هر	هر
log N	هر	هر	هر	هر
N	چند میلیون	چند ده میلیون	چند صد میلیون	چند میلیارد
N log N	چند صد هزار	چند میلیون	چند ده میلیون	چند صد میلیون
N^2	چند صد	هزار	چند هزار	چند ده هزار
N^3	صد	چند صد	هزار	چند هزار
2^N	بیست	بیست و چند	بیست و چند	سی

نتیجه. برای عقب نماندن از قاعده‌ی مور نیاز به الگوریتم‌های خطی یا خطی-لگاریتمی داریم.

جستجوی دودویی

- هدف. با داشتن یک آرایه‌ی مرتب و یک کلید، اندیس کلید را در آرایه پیدا کنید.

- جستجوی دودویی. کلید مورد نظر را با کلید وسط مقایسه کن:
  - اگر کوچک‌تر است، نیمه‌ی چپ را جستجو کن.
  - اگر بزرگ‌تر است، نیمه‌ی راست را جستجو کن.
  - اگر مساوی است، کلید پیدا شده است.

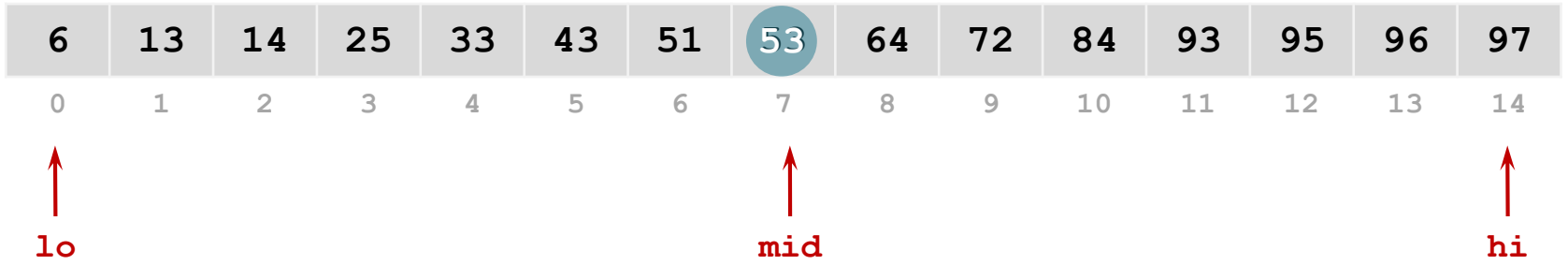


جستجوی دودویی

- هدف. با داشتن یک آرایه‌ی مرتب و یک کلید، اندیس کلید را در آرایه پیدا کنید.

- جستجوی دودویی. کلید مورد نظر را با کلید وسط مقایسه کن:
  - اگر کوچک‌تر است، نیمه‌ی چپ را جستجو کن.
  - اگر بزرگ‌تر است، نیمه‌ی راست را جستجو کن.
  - اگر مساوی است، کلید پیدا شده است.

جستجوی موفق ۳۳



جستجوی دودویی

- هدف. با داشتن یک آرایه‌ی مرتب و یک کلید، اندیس کلید را در آرایه پیدا کنید.

- جستجوی دودویی. کلید مورد نظر را با کلید وسط مقایسه کن:
  - اگر کوچک‌تر است، نیمه‌ی چپ را جستجو کن.
  - اگر بزرگ‌تر است، نیمه‌ی راست را جستجو کن.
  - اگر مساوی است، کلید پیدا شده است.

جستجوی موفق ۳۳

جستجوی دودویی

- هدف. با داشتن یک آرایه‌ی مرتب و یک کلید، اندیس کلید را در آرایه پیدا کنید.

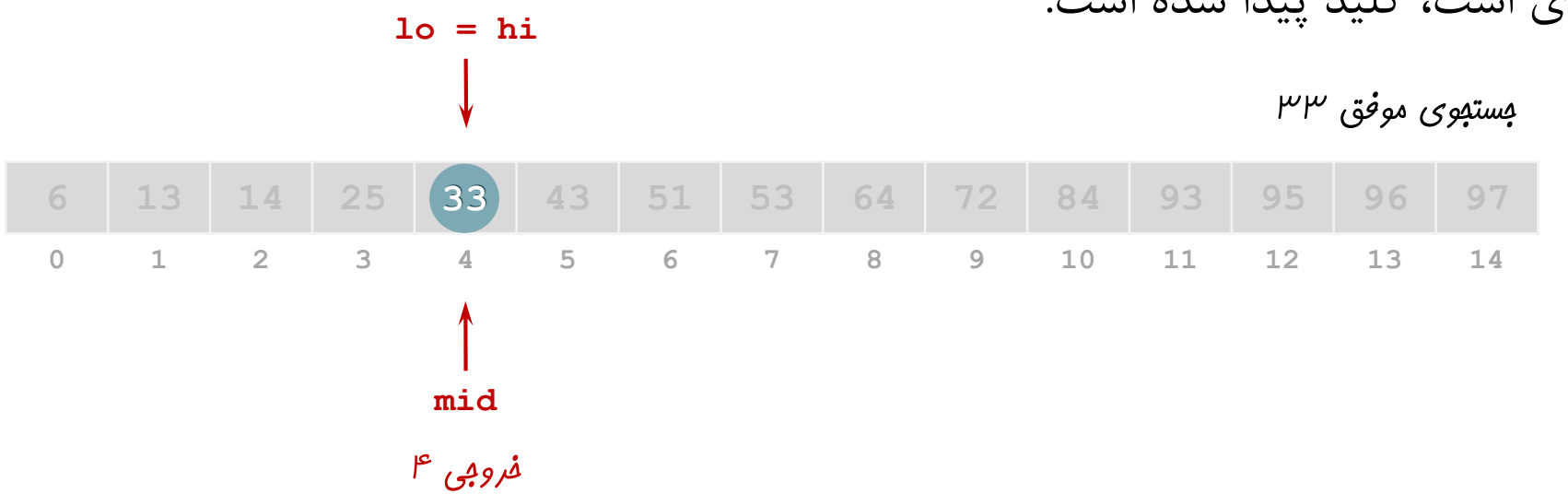
- جستجوی دودویی. کلید مورد نظر را با کلید وسط مقایسه کن:
  - اگر کوچک‌تر است، نیمه‌ی چپ را جستجو کن.
  - اگر بزرگ‌تر است، نیمه‌ی راست را جستجو کن.
  - اگر مساوی است، کلید پیدا شده است.

جستجوی موفق ۳۳

جستجوی دودویی

- هدف. با داشتن یک آرایه‌ی مرتب و یک کلید، اندیس کلید را در آرایه پیدا کنید.

- جستجوی دودویی. کلید مورد نظر را با کلید وسط مقایسه کن:
  - اگر کوچک‌تر است، نیمه‌ی چپ را جستجو کن.
  - اگر بزرگ‌تر است، نیمه‌ی راست را جستجو کن.
  - اگر مساوی است، کلید پیدا شده است.



جستجوی دودویی: پیاده‌سازی در جاوا

- پیاده‌سازی جستجوی دودویی چقدر آسان است؟
  - اولین پیاده‌سازی جستجوی دودویی سال ۱۹۴۶؛ اولین پیاده‌سازی بدون خطا سال ۱۹۶۲.
  - خطای جاوا در پیاده‌سازی **`Arrays.binarySearch()`** در سال ۲۰۰۶ کشف شد.

```
public static int binarySearch(int[] a, int key)
{
   int lo = 0, hi = a.length - 1;
   while (lo <= hi)
   {
      int mid = lo + (hi - lo) / 2;
      if      (key < a[mid]) hi = mid - 1;
      else if (key > a[mid]) lo = mid + 1;
      else return mid;
   }
   return -1;
}
```

ثابت مستقل از حلقه. اگر کلید مورد نظر در آرایه باشد، آنگاه همواره **`a[lo] ≤ key ≤ a[hi]`**

جستجوی دودویی: تحلیل ریاضی

- گزاره. جستجوی دودویی برای جستجو در یک آرایه‌ی مرتب با اندازه‌ی **N**، حداکثر **lg N + 1** مقایسه انجام می‌دهد.

- تعریف.
  - **T(N)** = حداکثر تعداد مقایسه‌های جستجوی دودویی در یک زیرآرایه‌ی مرتب با اندازه‌ی **N**.

- رابطه‌ی بازگشتی.

$$T(N) \le T(N/2) + 1, \quad T(1) = 1$$

$$\begin{aligned} T(N) &\le T(N/2) + 1 \\ &\le T(N/4) + 1 + 1 \\ &\le T(N/8) + 1 + 1 + 1 \\ &\ldots \\ &\le T(N/N) + 1 + 1 + \ldots + 1 \\ &= 1 + \lg N \end{aligned}$$

یک الگوریتم $N^2 \lg N$ برای مسئله‌ی ۳-مجموع

- الگوریتم.
  - **N** عدد (متمایز) را مرتب کن.
  - به ازای هر جفت از اعداد مانند **a[i]** و **a[j]** یک جستجوی دودویی برای یافتن **(a[i]+a[j])-** انجام بده.

- تحلیل. مرتبه‌ی رشد برابر با $N^2 \lg N$ است.
  - مرحله ۱: N^2 با استفاده از مرتب‌سازی درجی
  - مرحله ۲: $N^2 \lg N$

```
input
   30 -40 -20 -10 40 0 10 5

sort
   -40 -20 -10 0 5 10 30 40

binary search
   (-40, -20)   60
   (-40, -10)   50
   (-40,   0)   40
   (-40,   5)   35
   (-40,  10)   30
   ...
   (-40,  40)    0
   ...
   (-10,   0)   10
   ...
   ( 10,  30)  -40
   ( 10,  40)  -50
   ( 30,  40)  -70
```

تکراری

مقایسه الگوریتم‌های ۳-مجموع

- فرضیه. الگوریتم $N^2 \lg N$ در عمل بسیار سریع‌تر از الگوریتم کورکورانه‌ی N^3 است.

N	time (seconds)
1,000	0.1
2,000	0.8
4,000	6.4
8,000	51.1

ThreeSum.java

N	time (seconds)
1,000	0.14
2,000	0.18
4,000	0.34
8,000	0.96
16,000	3.67
32,000	14.88
64,000	59.16

ThreeSumFast.java

وابستگی زمان اجرا به داده‌های ورودی

انواع تحلیل

- بهترین حالت. حد پایین روی هزینه.
  - با استفاده از «ساده‌ترین» ورودی
  - فراهم کننده‌ی یک هدف برای تمام ورودی‌ها
- بدترین حالت. حد بالا روی هزینه.
  - با استفاده از «سخت‌ترین» ورودی
  - فراهم کننده‌ی یک تضمین برای تمام ورودی‌ها
- حالت متوسط. هزینه‌ی مورد انتظار برای یک ورودی تصادفی.
  - نیاز به یک مدل برای ورودی «تصادفی»
  - فراهم کننده‌ی روشی برای تخمین کارایی

مثال ۱. تعداد دستیابی‌ها در الگوریتم کورکورانه ۳-مجموع

بهترین حالت: $\sim 1/2\ N^3$

حالت متوسط: $\sim 1/2\ N^3$

بدترین حالت: $\sim 1/2\ N^3$

مثال ۲. تعداد مقایسه‌ها در جستجوی دودویی

بهترین حالت: ~ 1

حالت متوسط: $\sim \lg N$

بدترین حالت: $\sim \lg N$

نمادهای معمول در تحلیل الگوریتم‌ها

نماد	مفهوم	مثال	شکل خلاصه برای	مورد استفاده
تیلدا	جمله‌ی بزرگ‌تر	$\sim 10N^2$	$10N^2$ $10N^2 + 22N\lg N$ $10N^2 + 2N + 37$	فراهم کننده مدل تقریبی
تِتای بزرگ	نرخ رشد مجانبی	$\Theta(N^2)$	$\frac{1}{2} N^2$ $10N^2$ $5N^2 + 22N\lg N + 3N$	دسته‌بندی الگوریتم‌ها
اُی بزرگ	$\Theta(N^2)$ و کوچک‌تر	$O(N^2)$	$10N^2$ $100N$ $22N\lg N + 3N$	فراهم کننده حد بالا
اُمگای بزرگ	$\Theta(N^2)$ و بزرگ‌تر	$\Omega(N^2)$	$\frac{1}{2} N^2$ N^5 $N^3 + 22N\lg N + 3N$	فراهم کننده حد پایین

یک اشتباه متداول. تفسیر اُی بزرگ به عنوان یک مدل تقریبی!