

احتمالات

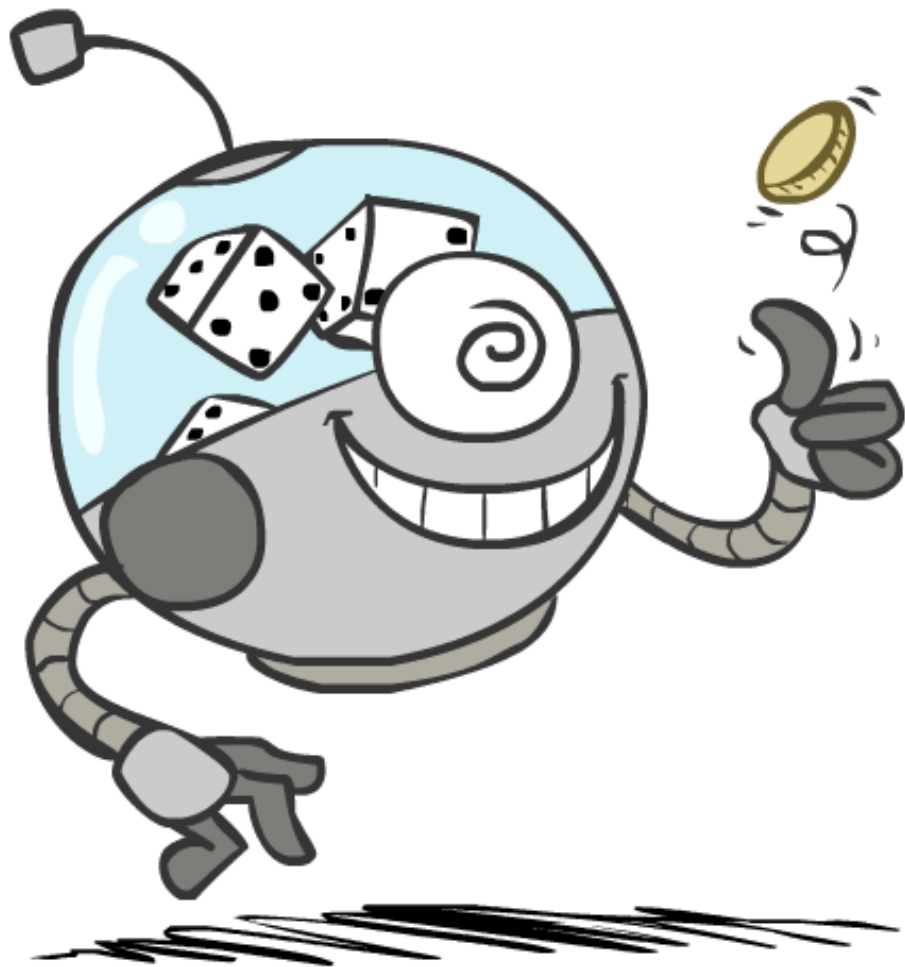
سید ناصر رضوی n.razavi@tabrizu.ac.ir

۱۳۹۵



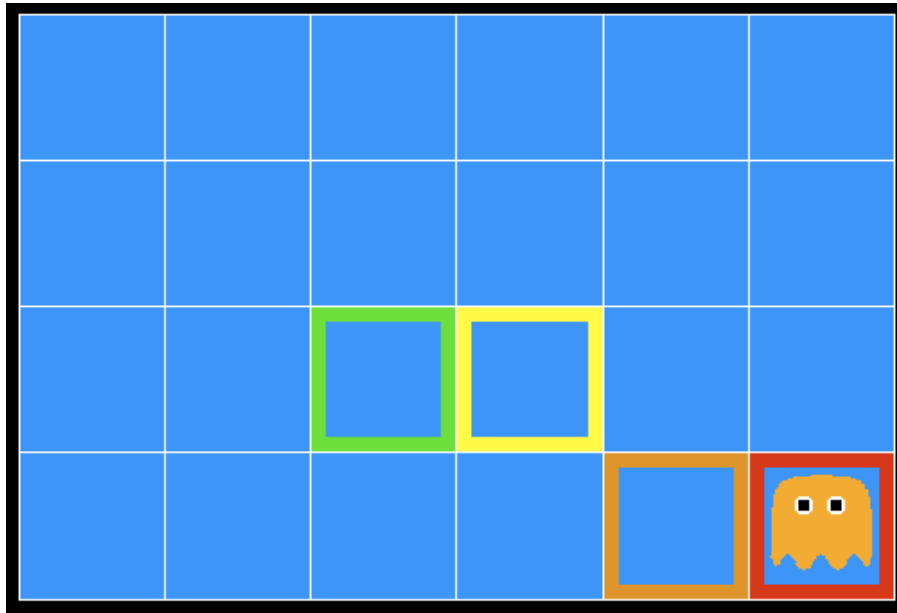
□ احتمالات.

- متغیرهای تصادفی
- توزیع توأم و حاشیه‌ای
- توزیع شرطی
- قاعده ضرب، قاعده زنجیری، قاعده بیز
- استنتاج
- استقلال
- استقلال شرطی



استنتاج در محیط عامل (روح یاب)

۴



□ در یکی از خانه‌های گرید یک روح وجود دارد.

□ حسگرهای عامل اطلاعاتی در مورد فاصله هر خانه تا مکان روح در اختیار عامل قرار می‌دهند.

- در خانه‌ای که روح قرار دارد: قرمز
- خانه‌های با فاصله ۱ یا ۲: نارنجی
- خانه‌های با فاصله ۳ یا ۴: زرد
- خانه‌های با فاصله ۵ یا بیشتر: سبز

□ اطلاعات حسگرها دارای نویز است، اما خوشبختانه $P(\text{Color} \mid \text{Distance})$ را می‌دانیم.

$P(\text{red} \mid 3)$	$P(\text{orange} \mid 3)$	$P(\text{yellow} \mid 3)$	$P(\text{green} \mid 3)$
0.05	0.15	0.5	0.3

اجرای نمایشی

۵

□ مثال. یافتن مکان روح در گرید.

0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11

0.17	0.10	0.10
0.09	0.17	0.10
<0.01	0.09	0.17

<0.01	<0.01	0.03
<0.01	0.05	0.05
<0.01	0.05	0.81

□ مفاهیم پایه‌ای.

□ **متغیر مشاهده شده** [شواهد]: عامل در مورد برخی از جنبه‌های محیط اطلاعات قطعی دارد. [مانند اطلاعات دریافتی از حسگرها یا نشانه‌ها]

□ **متغیر مشاهده نشده**: عامل باید در مورد برخی دیگر از جنبه‌های محیط استدلال کند. [مانند مکان یک شی یا نوع بیماری]

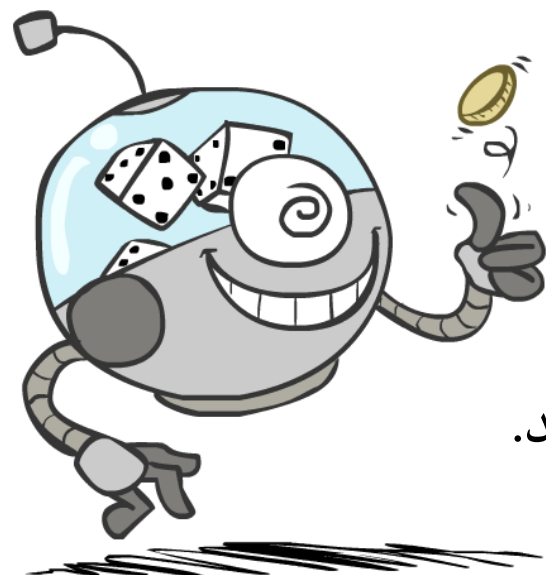
□ **مدل**: عامل می‌داند چه ارتباطی میان متغیرهای معلوم و مجهول وجود دارد.

□ **استدلال احتمالاتی**. یک چارچوب به منظور مدیریت باورها و دانش درباره محیط.

متغیرهای تصادفی

۷

□ **متغیر تصادفی.** جنبه‌ای از محیط که ممکن است در مورد آن عدم قطعیت داشته باشیم.



□ $R =$ آیا هوا بارانی است؟

□ $T =$ هوا سرد است یا گرم؟

□ $D =$ چقدر طول می‌کشد به فرودگاه برسیم؟

□ $L =$ روح در کدام خانه قرار دارد؟

□ **دامنه.** همانند متغیرهای CSP ، متغیرهای تصادفی دارای یک دامنه هستند.

□ دامنه R : {درست، نادرست} یا $\{+r, -r\}$

□ دامنه T : {سرد، گرم}

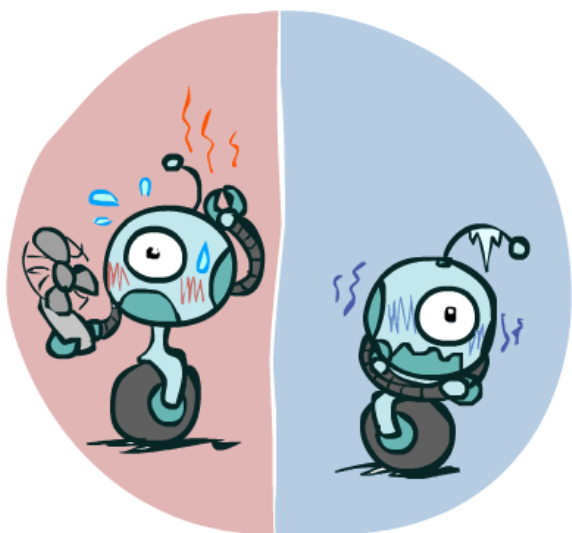
□ دامنه D : $[0, \infty)$

□ دامنه L : مکان‌های ممکن در گرید

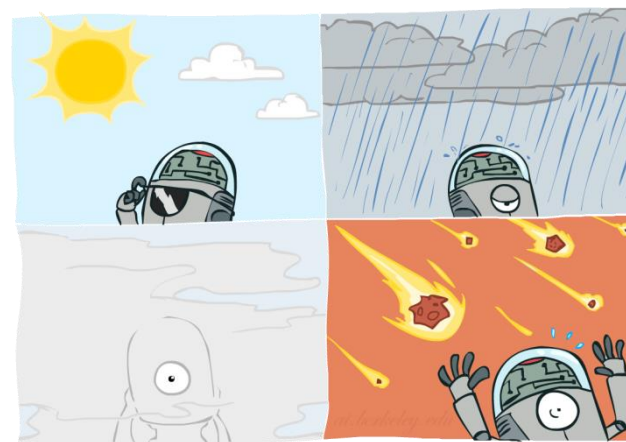
توابع توزیع احتمال

۸

□ تابع توزیع احتمال. انتساب یک احتمال به هر یک از مقادیر دامنه.



T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5



W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

توابع توزیع احتمال

۹

□ نمایش توابع توزیع احتمال. یک جدول بیانگر احتمال مربوط به هر مقدار.

T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5

W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

$$\leftarrow P(W = \text{rain}) = 0.1 = P(\text{rain})$$

فلاصه نویسی

□ ویژگی‌ها.

$$\forall x \ P(X = x) \geq 0$$

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

توابع توزیع احتمال توأم

۱۰

□ تابع توزیع احتمال توأم بر روی یک مجموعه از متغیرها مانند $X_1, X_2, \dots, X_n$.

□ بیانگر احتمال وقوع هر انتساب ممکن از مقادیر به متغیرها.

□ اندازه توزیع؟ d^n اگر دامنه هر متغیر شامل d مقدار باشد.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ ویژگی‌ها.

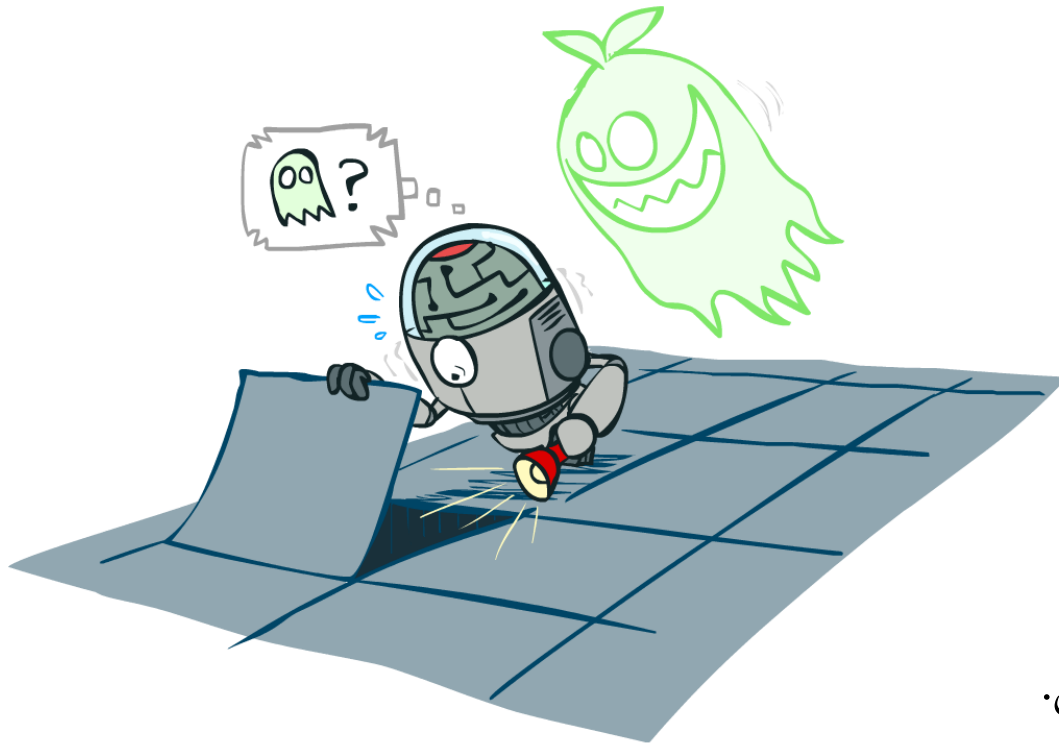
$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

مدل‌های احتمالاتی

۱۱

- مدل احتمالاتی. یک توزیع توأم بر روی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی.
- بیانگر جنبه‌هایی از محیط که برای ما اهمیت دارند!



- مدل‌های احتمالاتی.
- مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به همراه دامنه هر یک.
- هر انتساب ممکن از مقادیر به متغیرها یک پیامد نام دارد.
- توزیع احتمال توأم: بیانگر میزان محتمل بودن هر پیامد ممکن.
- ایده‌آل این است که فقط برخی از متغیرها به طور مستقیم در تعامل باشند.

رویدادها

۱۲

□ رویداد. یک مجموعه از پیامدها!

$$P(E) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E} P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ با داشتن توزیع توأم، می‌توانیم احتمال هر رویداد ممکن را محاسبه کنیم.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(\text{hot}, \text{sun}) = 0.4$$

رویدادها

۱۳

□ رویداد. یک مجموعه از پیامدها!

$$P(E) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E} P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ با داشتن توزیع توأم، می‌توانیم احتمال هر رویداد ممکن را محاسبه کنیم.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(hot) = 0.4 + 0.1$$

رویدادها

۱۴

□ رویداد. یک مجموعه از پیامدها!

$$P(E) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E} P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ با داشتن توزیع توأم، می‌توانیم احتمال هر رویداد ممکن را محاسبه کنیم.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(\text{hot or sun}) = 0.4 + 0.1 + 0.2$$

پرسش کلاسی: رویدادها

۱۵

□ س. احتمال وقوع هر یک از رویدادهای زیر را محاسبه کنید.

$$P(+x, -y) =$$

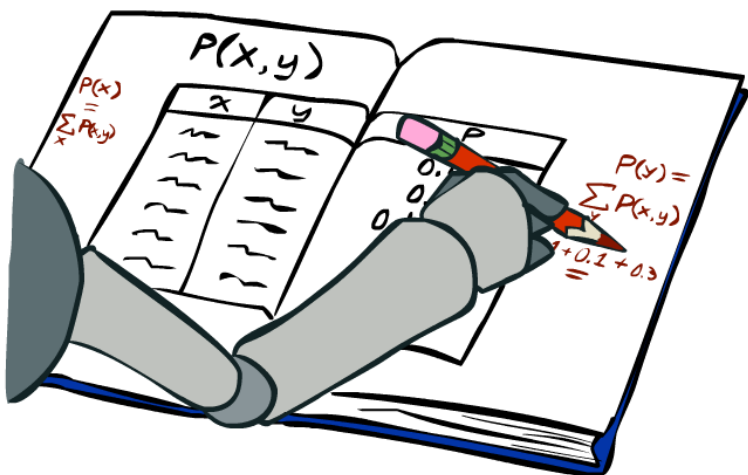
$$P(-y) =$$

$$P(+x \text{ or } -y) =$$

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.4
$+x$	$-y$	0.1
$-x$	$+y$	0.2
$-x$	$-y$	0.3

توابع توزیع حاشیه‌ای

۱۶



- توزیع حاشیه‌ای. توزیع احتمال یک زیرمجموعه از متغیرها.
- بخشی از جدول توزیع احتمال حاصل از حذف تعدادی متغیر.

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(t) = \sum_w P(t, w)$$



T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5

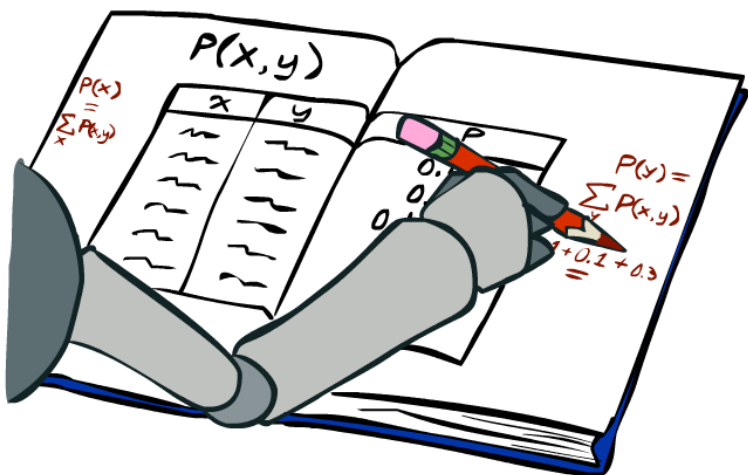


$$P(w) = \sum_t P(t, w)$$

W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.4

توابع توزیع حاشیه‌ای

۱۷



- توزیع حاشیه‌ای. توزیع احتمال یک زیرمجموعه از متغیرها.
- بخشی از جدول توزیع احتمال حاصل از حذف تعدادی متغیر.

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(t) = \sum_w P(t, w)$$



$$P(w) = \sum_t P(t, w)$$

	sun	rain	$P(T)$
hot	0.4	0.1	0.5
cold	0.2	0.3	0.5
$P(W)$	0.6	0.4	

پرسش کلاسی: توابع توزیع حاشیه‌ای

۱۸

□ س. با توجه به توزیع توأم داده شده، توزیع حاشیه‌ای مربوط به $P(X)$ و $P(Y)$ را محاسبه کنید.

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.2
$+x$	$-y$	0.3
$-x$	$+y$	0.4
$-x$	$-y$	0.1

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$



$$P(y) = \sum_x P(x, y)$$



X	$P(X)$
$+x$	
$-x$	

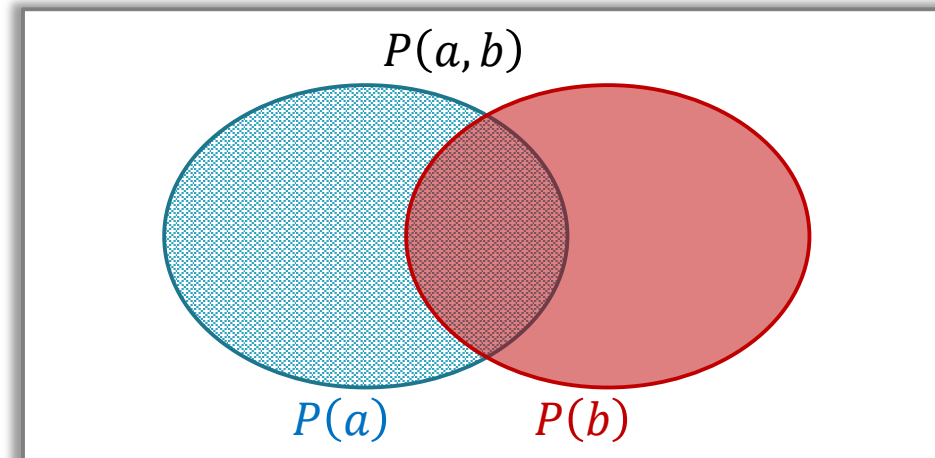
Y	$P(Y)$
$+y$	
$-y$	

توزیع شرطی

۱۹

□ توزیع شرطی. یک رابطه ساده میان توزیع‌های توأم و حاشیه‌ای.

$$P(a|b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$



توزیع شرطی

۲۰

□ مثال.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(a|b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$

$$P(W = \text{sun} | T = \text{cold}) = \frac{P(W = \text{sun}, T = \text{cold})}{P(T = \text{cold})} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$\begin{aligned} P(T = \text{cold}) &= P(T = \text{cold}, W = \text{sun}) + P(T = \text{cold}, W = \text{rain}) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \end{aligned}$$

پرسش کلاسی: احتمال شرطی

۲۱

□ س. با توجه به توزیع توأم داده شده، هر یک از احتمال‌های شرطی خواسته شده را محاسبه کنید.

$$P(+x \mid +y) =$$

$$P(-x \mid +y) =$$

$$P(-y \mid +x) =$$

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.2
$+x$	$-y$	0.3
$-x$	$+y$	0.4
$-x$	$-y$	0.1

توزیع‌های شرطی

۲۲

□ توزیع شرطی. یک توزیع احتمال بر روی مجموعه‌ای از متغیرها با ثابت در نظر گرفتن مقدار سایر متغیرها.

$P(W T)$	W	$P(W hot)$
	sun	0.8
	rain	0.2

W	$P(W cold)$
sun	0.4
rain	0.6

توزیع‌های شرطی

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

توزیع احتمال توأم

ترفند نرمال سازی

۲۳

□ ترفند نرمال سازی.

$$\begin{aligned}P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\&= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4\end{aligned}$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

W	$P(W c)$
sun	0.4
rain	0.6

$$\begin{aligned}P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\&= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6\end{aligned}$$

ترفند نرمال سازی

۲۴

□ ترفند نرمال سازی.

$$\begin{aligned}P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\&= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4\end{aligned}$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

انتخاب توزیع های توأم
منطبق با شواهد



W	$P(W, c)$
sun	0.2
rain	0.3

نرمال سازی



W	$P(W c)$
sun	0.4
rain	0.6

$$\begin{aligned}P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\&= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6\end{aligned}$$

پرسش کلاسی: ترفند نرمال سازی

۲۵

□ ترفند نرمال سازی.

$$P(X|Y = -y) ?$$

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.2
$+x$	$-y$	0.3
$-x$	$+y$	0.4
$-x$	$-y$	0.1

انتخاب توزیع های توأم
منطبق با شواهد



X	$P(X, -y)$
$+x$	0.3
$-x$	0.1

نرمال سازی



X	$P(X -y)$
$+x$	0.75
$-x$	0.25

نرمال سازی

۲۶

□ مراحل نرمال سازی.

□ مرحله ۱: محاسبه مجموع مقادیر (Z) .

□ مرحله ۲: تقسیم هر یک از مقادیر بر Z .

W	$P(W, c)$
sun	0.2
rain	0.3

نرمال سازی
 $Z = 0.5$

W	$P(W c)$
sun	0.4
rain	0.6

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	20
hot	rain	5
cold	sun	10
cold	rain	15

نرمال سازی
 $Z = 50$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

استنتاج احتمالاتی

۲۷

□ هدف. محاسبه یک احتمال از روی سایر احتمالات شناخته شده.

□ در استنتاج احتمالاتی، معمولاً احتمال‌های شرطی را محاسبه می‌کنیم.

□ مانند احتمال به موقع رسیدن به شرطی که تصادف رخ نداده باشد.

□ احتمالات شرطی: بیانگر **باور** عامل با توجه به شواهد دریافتی.



$$P(\text{on time} \mid \text{no accident}) = 0.9$$

$$P(\text{on time} \mid \text{no accident}, 5:00 \text{ a.m.}) = 0.95$$

$$P(\text{on time} \mid \text{no accident}, 5:00 \text{ a.m.}, \text{raining}) = 0.80$$

□ احتمال‌ها با دریافت شواهد جدید تغییر می‌کنند.

□ دریافت شواهد جدید باعث به روز رسانی باورها می‌شود.

استنتاج به وسیله شمارش

۲۸

□ استنتاج به وسیله شمارش.

$$P(\text{sun}) = 0.30 + 0.10 + 0.10 + 0.15$$

S	T	W	$P(S, T, W)$
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

استنتاج به وسیله شمارش

۲۹

□ استنتاج به وسیله شمارش.

$$P(\text{sun} \mid \text{winter}) = \frac{0.10 + 0.15}{0.50}$$

S	T	W	$P(S, T, W)$
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

استنتاج به وسیله شمارش

۳۰

□ استنتاج به وسیله شمارش.

$$P(\text{sun} \mid \text{winter}, \text{hot}) = \frac{0.10}{0.10 + 0.05}$$

S	T	W	$P(S, T, W)$
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

استنتاج به وسیله شمارش

۳۱

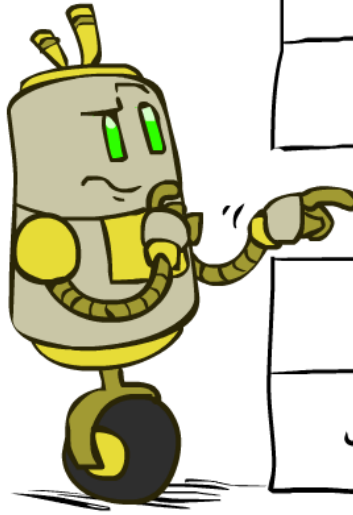
□ شکل کلی.

□ متغیرهای مشاهده شده: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$

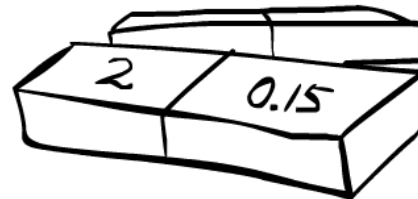
□ متغیر(های) مورد پرس و جو: Q

□ متغیرهای مخفی: $H_1, H_2, \dots, H_r$

□ مرحله ۱. انتخاب سطرهای سازگار با شواهد!



x	$P(x)$
-3	0.05
-1	0.25
0	0.07
1	0.2
5	0.01



استنتاج به وسیله شمارش

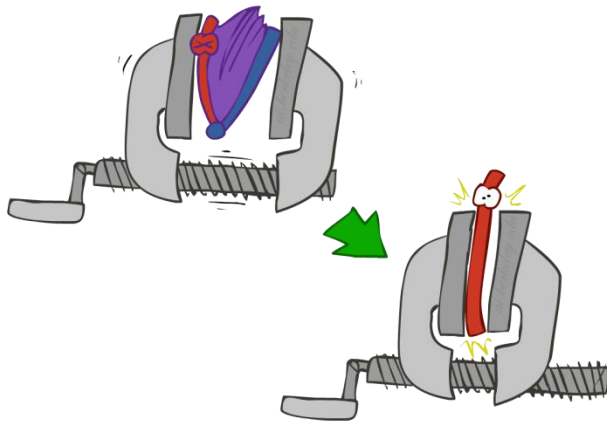
۳۲

□ شکل کلی.

□ متغیرهای مشاهده شده: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$

□ متغیر(های) مورد پرس و جو: Q

□ متغیرهای مخفی: $H_1, H_2, \dots, H_r$



□ مرحله ۲. جمع زدن بر روی متغیرهای مخفی برای

به دست آوردن توزیع توأم متغیرهای مشاهده شده

و متغیر(های) پرس و جو.

$$P(Q, e_1, \dots, e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} P(Q, h_1, \dots, h_r, e_1, \dots, e_k)$$

استنتاج به وسیله شمارش

۳۳

□ شکل کلی.

□ متغیرهای مشاهده شده: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$

□ متغیر(های) مورد پرس و جو: Q

□ متغیرهای مخفی: $H_1, H_2, \dots, H_r$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1, \dots, e_k)$$

$$P(Q|e_1, \dots, e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1, \dots, e_k)$$

□ مرحله ۳. نرمال سازی

$$\times \frac{1}{Z}$$

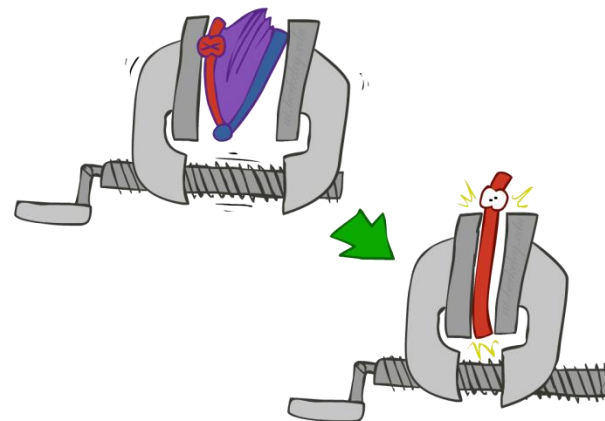
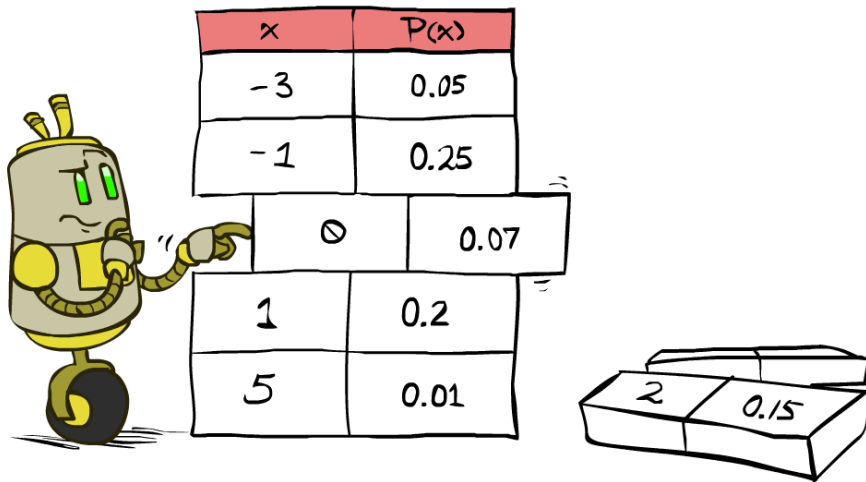
استنتاج به وسیله شمارش

۳۴

□ مشکلات.

□ پیچیدگی زمانی: $O(d^n)$

□ پیچیدگی حافظه: $O(d^n)$



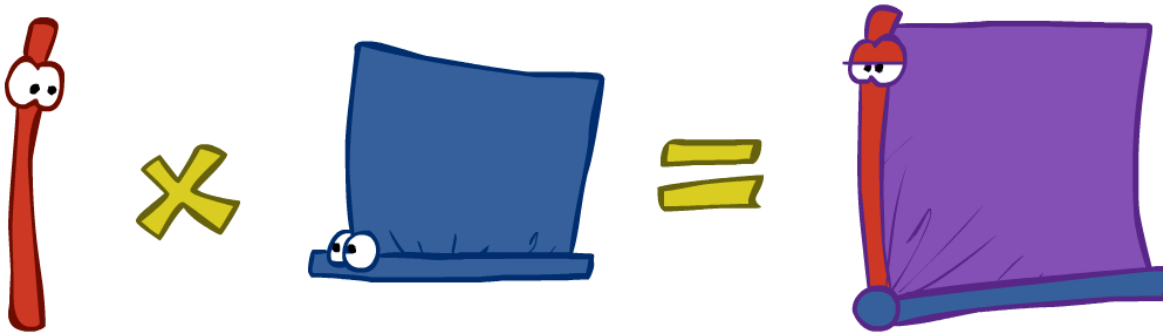
$$\times \frac{1}{Z}$$

قاعده ضرب

۳۵

□ هدف. محاسبه توزیع توأم از روی توزیع‌های شرطی.

$$P(y)P(x|y) = P(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$



□ مثال.

$$P(y)P(x|y) = P(x, y)$$

W	$P(W)$
sun	0.8
rain	0.2

D	W	$P(D W)$
wet	sun	0.1
wet	rain	0.7
dry	sun	0.9
dry	rain	0.3



D	W	$P(D, W)$
wet	sun	
wet	rain	
dry	sun	
dry	rain	

قاعده ضرب زنجیری

۳۷

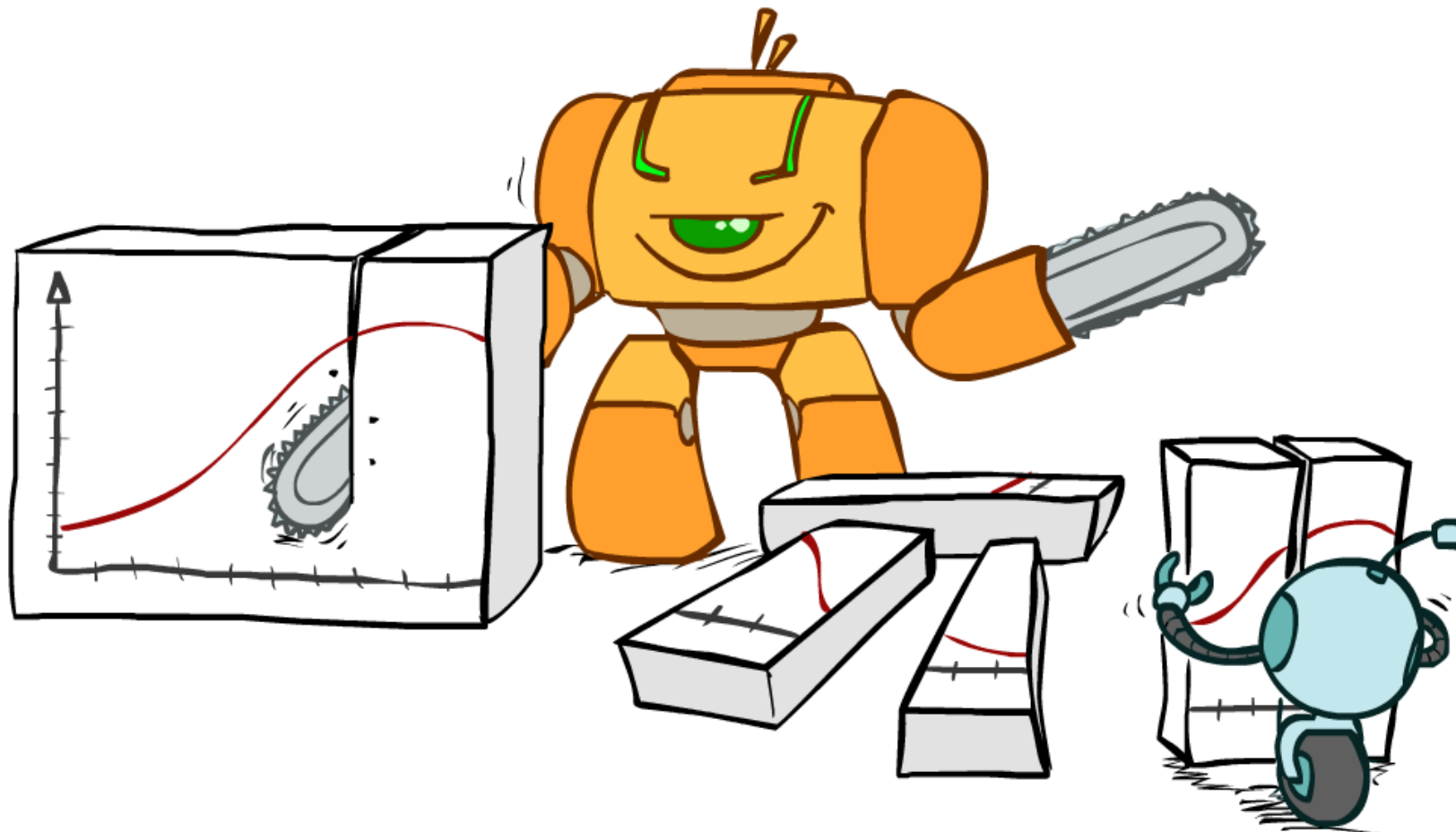
□ قاعده ضرب زنجیری.

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$$

□ س. چرا این رابطه همواره درست است؟

$$P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2) = P(x_1) \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_1)} \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{P(x_1, x_2)}$$



□ دو روش مختلف برای فاکتورگیری از یک توزیع توأم بر روی دو متغیر.

$$P(x, y) = P(x)P(y|x) = P(y)P(x|y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)}$$

□ کاربردها.

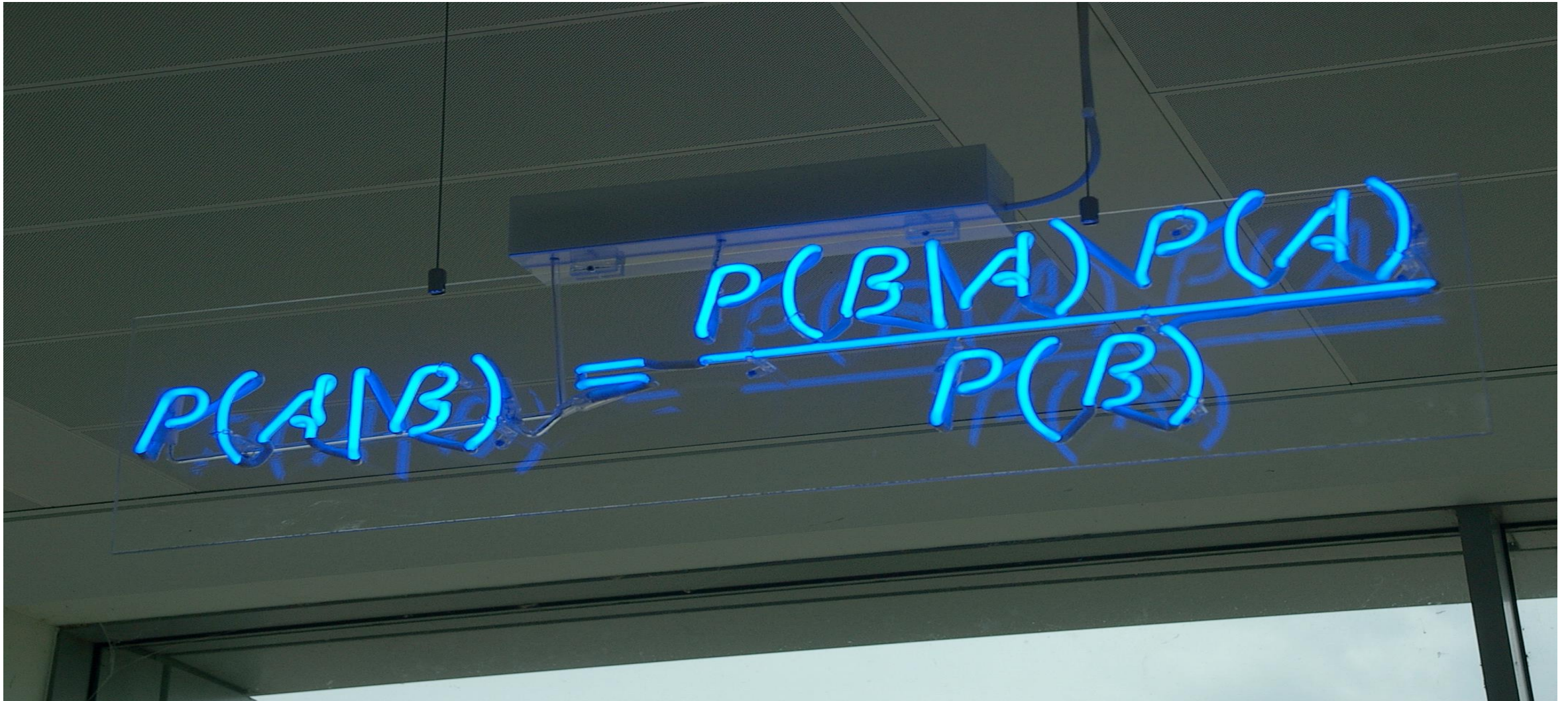
□ ایجاد یک توزیع شرطی از روی معکوس آن.

□ در اغلب اوقات محاسبه یکی از این دو توزیع شرطی ساده است،

اما محاسبه دیگری خیر!

□ پایه بسیاری از سیستم‌های هوش مصنوعی!




$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

استنتاج به وسیله قاعده بیز

۴۱

□ مثال. تشخیص بیماری از روی نشانه‌ها.

$$P(Cause|Effect) = \frac{P(Effect|Cause)P(Cause)}{P(Effect)}$$

□ مثال. تشخیص مننژیت (M) با توجه به گرفتگی گردن (S).

$$\begin{aligned}P(+m) &= 0.0001 \\P(+s|+m) &= 0.8 \\P(+s|-m) &= 0.01\end{aligned}$$

$$P(+m|+s) = \frac{P(+s|+m)P(+m)}{P(+s)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.1} = 0.0008$$

پرسش کلاسی: قاعده بیز

۴۲

□ س. با توجه به توزیع داده شده در زیر:

D	W	$P(D W)$
wet	sun	0.1
wet	rain	0.7
dry	sun	0.9
dry	rain	0.3

W	$P(W)$
sun	0.8
rain	0.2

احتمال $P(W|dry)$ را محاسبه کنید.

عامل روح‌یاب: بازیابی

۴۳

0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11

□ فرض کنید دو توزیع زیر را در اختیار داریم:

□ **توزیع پیشین** بر روی مکان روح: $P(G)$

■ که به صورت یکنواخت توزیع شده است.

□ مدل حسگر: $P(R|G)$

■ یعنی می‌دانیم حسگر عامل چگونه عمل می‌کند.

■ R = اطلاعات مربوط به رنگ دریافت شده در خانه (۱, ۱)

■ مثلاً $P(yellow|[1,1]) = 0.1$

□ اکنون می‌توانیم **توزیع پسین** $P(G|r)$ را با استفاده از قاعده بیز محاسبه کنیم:

$$P(g|r) \propto P(r|g)P(g)$$

عامل روح‌یاب: بازیابی

۴۴

0.17	0.10	0.10
0.09	0.17	0.10
<0.01	0.09	0.17

□ فرض کنید دو توزیع زیر را در اختیار داریم:

□ **توزیع پیشین** بر روی مکان روح: $P(G)$

■ که به صورت یکنواخت توزیع شده است.

□ مدل حسگر: $P(R|G)$

■ یعنی می‌دانیم حسگر عامل چگونه عمل می‌کند.

■ R = اطلاعات مربوط به رنگ دریافت شده در خانه (۱, ۱)

■ مثلاً $P(yellow|[1,1]) = 0.1$

□ اکنون می‌توانیم **توزیع پسین** $P(G|r)$ را با استفاده از قاعده بیز محاسبه کنیم:

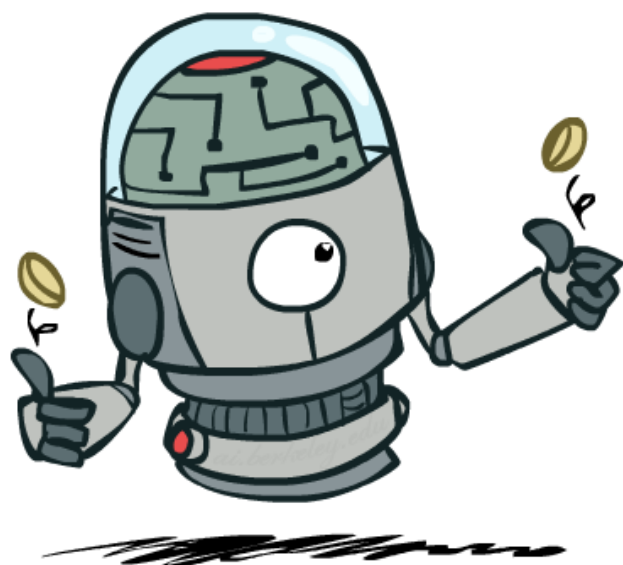
$$P(g|r) \propto P(r|g)P(g)$$

□ متغیرهای مستقل. در یک توزیع توأم، دو متغیر مستقل هستند اگر:

$$P(X, Y) = P(X)P(Y)$$

$$X \perp Y$$

$$\forall x, y \ P(x, y) = P(x)P(y)$$



□ در این صورت توزیع توأم قابل تجزیه به دو توزیع ساده‌تر است.

□ توجه. متغیرها معمولاً مستقل نیستند!

□ می‌توانیم استقلال را به عنوان یک فرض در مدل‌سازی به کار ببریم.

□ ساده‌سازی مدل!