

شبکه‌های بیز: بازنمایی

سید ناصر رضوی n.razavi@tabrizu.ac.ir

۱۳۹۵

مدل‌های احتمالاتی

۲



□ مدل. تشریح عملکرد محیط (یا بخشی از آن)

□ مدل‌ها همواره شامل ساده‌سازی هستند.

□ ممکن است مدل همه‌ی متغیرها را در نظر نگیرد.

□ ممکن است مدل همه‌ی تعاملات میان متغیرها را در نظر نگیرد.

□ «همه‌ی مدل‌ها نادرست هستند، اما برخی از آنها مفیدند» -- جرج باکس

□ س. از مدل‌های احتمالاتی چه استفاده‌ای می‌توان کرد؟

□ عامل نیاز دارد با توجه به شواهد موجود، درباره‌ی متغیرهای ناشناخته‌ی محیط استدلال کند.

□ مانند استدلال تشخیصی و استدلال علی

مدل برای محیط عامل روح یاب

۳

□ یادآوری. ارواح مخفی هستند، حسگرهای عامل دارای نویز هستند.

□ متغیرها.

□ T : حسگر بالایی قرمز است.

□ B : حسگر پایینی قرمز است.

□ G : روح در خانه بالایی است.

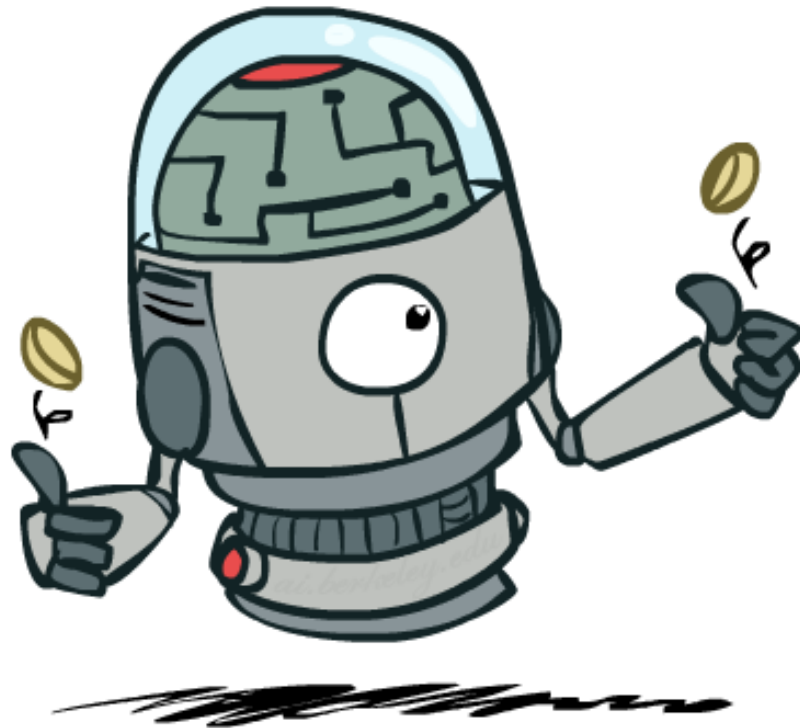
□ پرسش‌های نمونه.

□ $P(+g|+t, \neg b)$, $P(+g|+t)$, $P(+g)$

□ مشکل. حجم بسیار زیاد توزیع توأم!!!

T	B	G	$P(T, B, G)$
$+t$	$+b$	$+g$	0.16
$+t$	$+b$	$\neg g$	0.16
$+t$	$\neg b$	$+g$	0.24
$+t$	$\neg b$	$\neg g$	0.04
$\neg t$	$+b$	$+g$	0.04
$\neg t$	$+b$	$\neg g$	0.24
$\neg t$	$\neg b$	$+g$	0.06
$\neg t$	$\neg b$	$\neg g$	0.06

0.50
0.50



استقلال

۵

□ دو متغیر **مستقل** هستند اگر:

$$\forall x, y : P(x, y) = P(x)P(y) \Leftrightarrow X \perp Y$$

□ یعنی، توزیع توأم این دو متغیر را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو توزیع ساده‌تر بیان نمود.

□ یک شکل دیگر:

$$\forall x, y : P(x | y) = P(x) \Leftrightarrow X \perp Y$$

□ استقلال یک فرض ساده کننده در مدل سازی است:

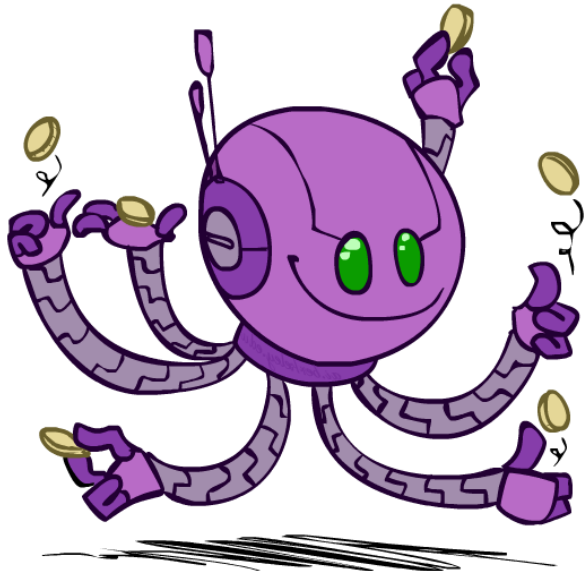
□ توزیع‌های توأم تجربی در بهترین حالت «نزدیک» به شرایط استقلال هستند.

□ به عنوان مثال، در مورد متغیرهای «آب و هوا»، «ترافیک» و «دندان درد» چه می‌توان فرض کرد؟

استقلال: مثال

۶

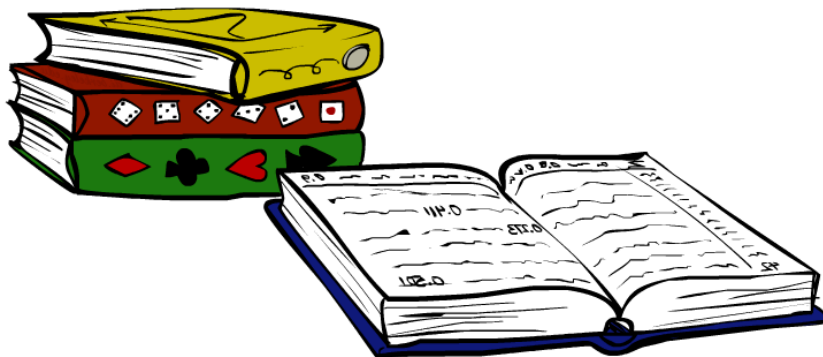
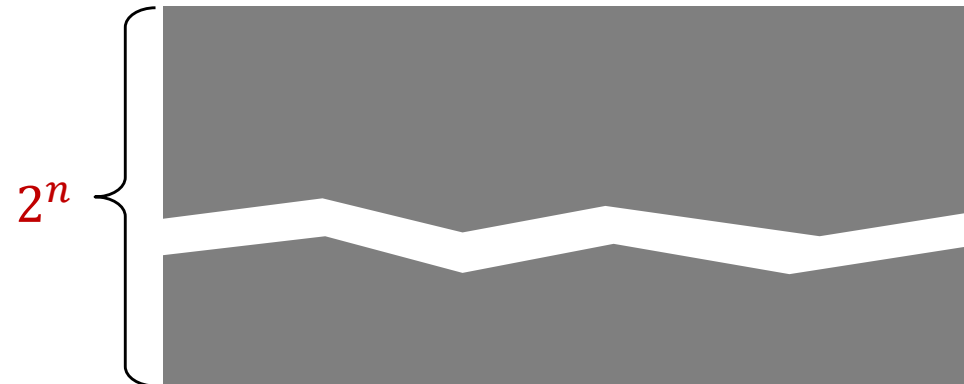
□ مثال. پرتاب n سکه



$P(X_1)$		$P(X_2)$		$\dots$		$P(X_n)$	
h	0.5	h	0.5	$\dots$		h	0.5
t	0.5	t	0.5	$\dots$		t	0.5

$2 \cdot n$

$P(X_1, X_2, \dots, X_n)$



استقلال؟

۷

□ س. آیا متغیرهای T و W مستقل هستند؟

$P_1(T, W)$

T	W	$P_1(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

وابسته

T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5

W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.4

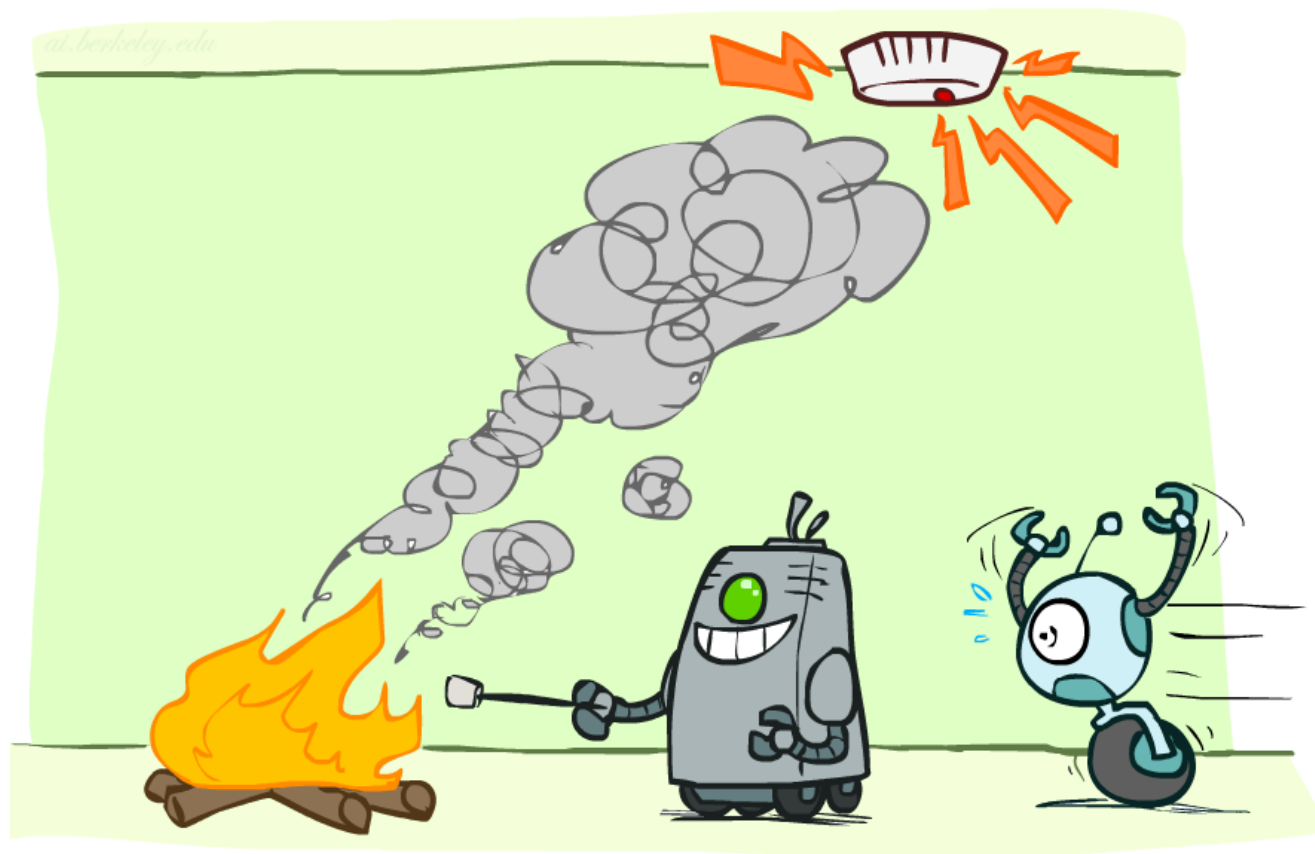
$P_2(T, W)$

T	W	$P_2(T, W)$
hot	sun	0.3
hot	rain	0.2
cold	sun	0.3
cold	rain	0.2

مستقل

استقلال شرطی

۸



استقلال شرطی

۹

□ اگر دندان شخصی سوراخ باشد، احتمال این که غذا در دندان او گیر کند به این که دندان او درد می‌کند یا خیر بستگی ندارد.

□ $P(+catch | +toothache, +cavity) = P(+catch | +cavity)$

□ این عدم وابستگی، در حالتی که دندان شخص سوراخ نباشد نیز برقرار است:

□ $P(+catch | +toothache, \neg cavity) = P(+catch | \neg cavity)$

□ با داشتن سوراخ در دندان، گیر کردن غذا در دندان از دندان درد مستقل شرطی است:

□ $P(Catch | Toothache, Cavity) = P(Catch | Cavity)$

□ جملات معادل.

□ $P(Toothache | Catch, Cavity) = P(Toothache | Cavity)$

□ $P(Toothache, Catch | Cavity) = P(Toothache | Cavity)P(Catch | Cavity)$

استقلال شرطی

۱۰

□ استقلال شرطی مبنایی‌ترین و مستحکم‌ترین نوع دانش ما در مورد محیط‌های غیرقطعی است:

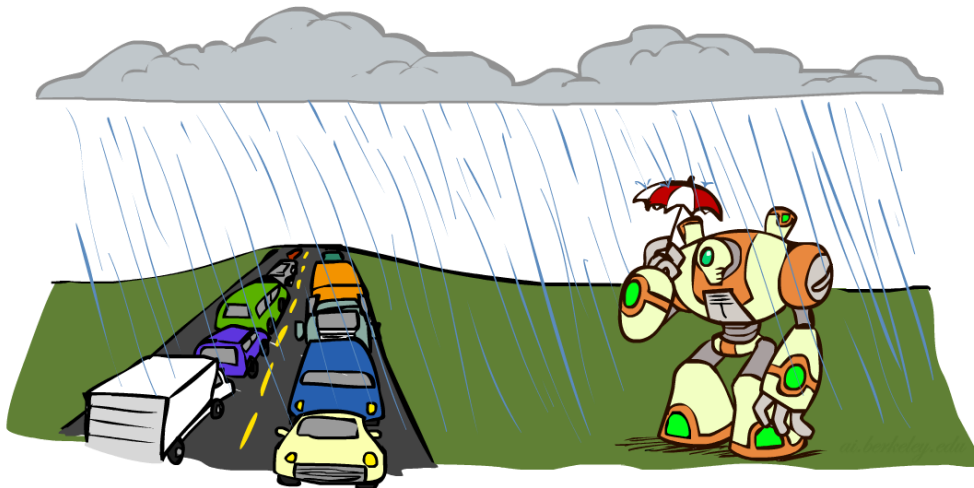
$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

$$X \perp Y | Z$$

$$\forall x, y, z : P(x|y, z) = P(x|z)$$

□ س. در دامنه‌ی زیر کدام متغیرها مستقل شرطی هستند؟

□ ترافیک، بارندگی و چتر



استقلال شرطی

۱۱

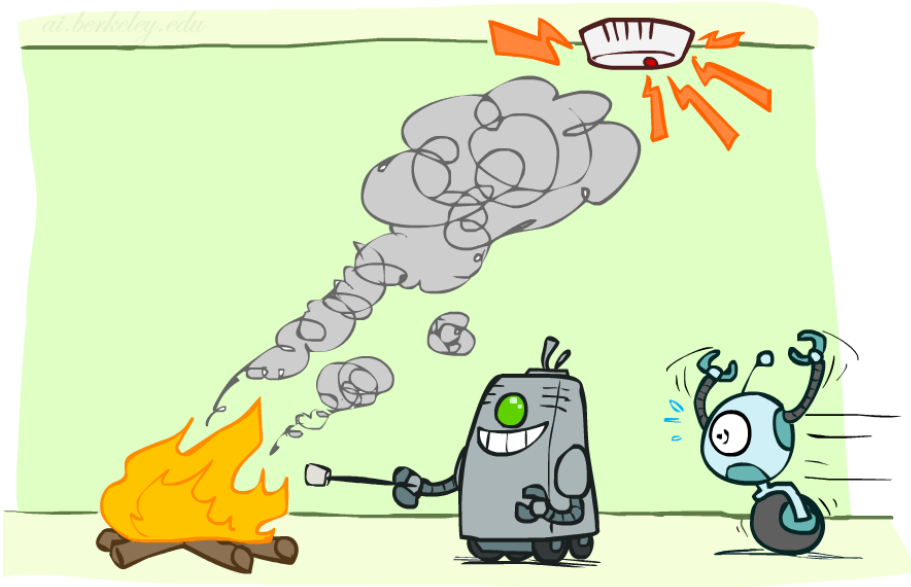
□ استقلال شرطی مبنایی‌ترین و مستحکم‌ترین نوع دانش ما در مورد محیط‌های غیرقطعی است:

$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

$$X \perp Y | Z$$

$$\forall x, y, z : P(x|y, z) = P(x|z)$$

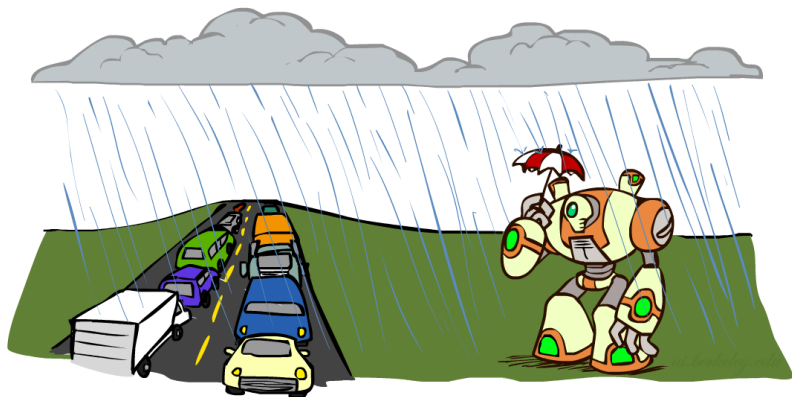
□ س. در دامنه‌ی زیر کدام متغیرها مستقل شرطی هستند؟
□ آتش، دود و زنگ هشدار



استقلال شرطی و قاعدهی زنجیری

۱۲

□ قاعدهی زنجیری.



$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2, X_1) \dots$$

□ یک تجزیهی بدیهی.

$$P(\text{Rain}, \text{Traffic}, \text{Umbrella})$$

$$= P(\text{Rain})P(\text{Traffic}|\text{Rain})P(\text{Umbrella}|\text{Traffic}, \text{Rain})$$

□ با فرض استقلال شرطی.

$$P(\text{Rain}, \text{Traffic}, \text{Umbrella})$$

$$= P(\text{Rain})P(\text{Traffic}|\text{Rain})P(\text{Umbrella}|\text{Rain})$$

قاعده زنجیری برای محیط عامل روح یاب

۱۳

- یادآوری. خروجی هر حسگر تنها به مکان روح بستگی دارد.
- یعنی، با دانستن مکان روح، دو حسگر مستقل شرطی هستند.

T	B	G	$P(T, B, G)$
$+t$	$+b$	$+g$	0.16
$+t$	$+b$	$\neg g$	0.16
$+t$	$\neg b$	$+g$	0.24
$+t$	$\neg b$	$\neg g$	0.04
$\neg t$	$+b$	$+g$	0.04
$\neg t$	$+b$	$\neg g$	0.24
$\neg t$	$\neg b$	$+g$	0.06
$\neg t$	$\neg b$	$\neg g$	0.06

$$P(G, T, B) = P(G)P(T|G)P(B|G)$$

□ متغیرها.

□ T : حسگر بالایی قرمز است.

□ B : حسگر پایینی قرمز است.

□ G : روح در خانه بالایی است.

□ داده‌ها.

$$P(+g) = 0.5$$

$$P(+t|+g) = 0.8$$

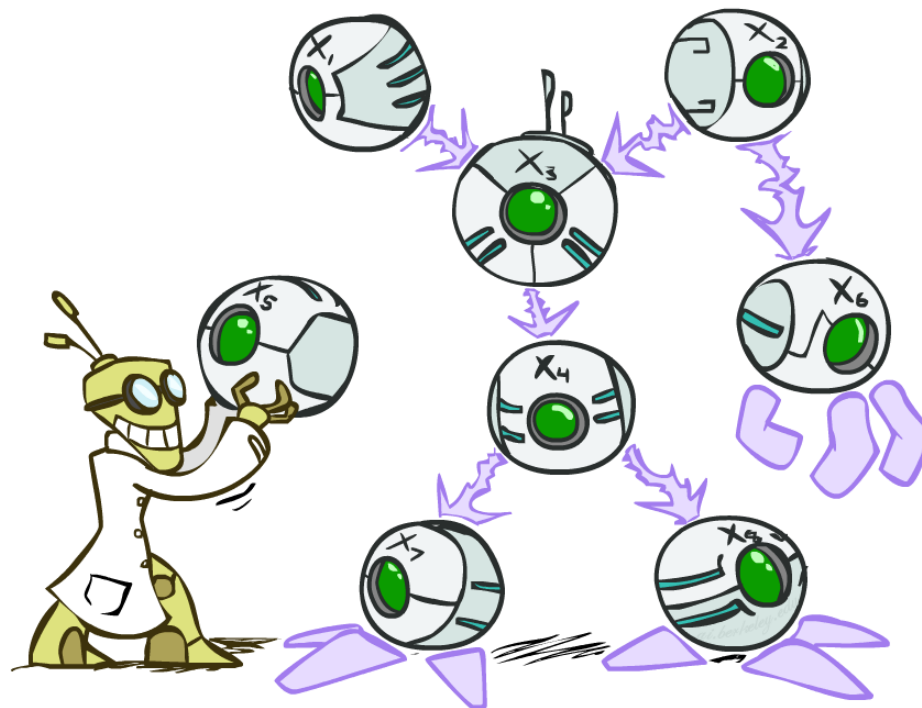
$$P(+b|+g) = 0.4$$

$$P(+t|\neg g) = 0.4$$

$$P(+b|\neg g) = 0.8$$

شبکه‌های بیز

۱۴



شبکه‌های بیز: معرفی

۱۵

□ مشکلات مربوط به استفاده از جداول توزیع توأم به عنوان مدل احتمالاتی.

□ به جز در مواردی که تعداد متغیرها اندک است، اندازه این جدول به قدری بزرگ است که نمی‌توان آن را به طور صریح نمایش داد.

□ یادگیری (تخمین) مقدار چند متغیر به طور همزمان دشوار است، مگر آن که تعداد آنها اندک باشد.

□ شبکه‌های بیز. روشی به منظور توصیف توزیع‌های توأم پیچیده (مدل‌ها) با استفاده از توزیع‌های محلی و ساده (توزیع‌های شرطی)

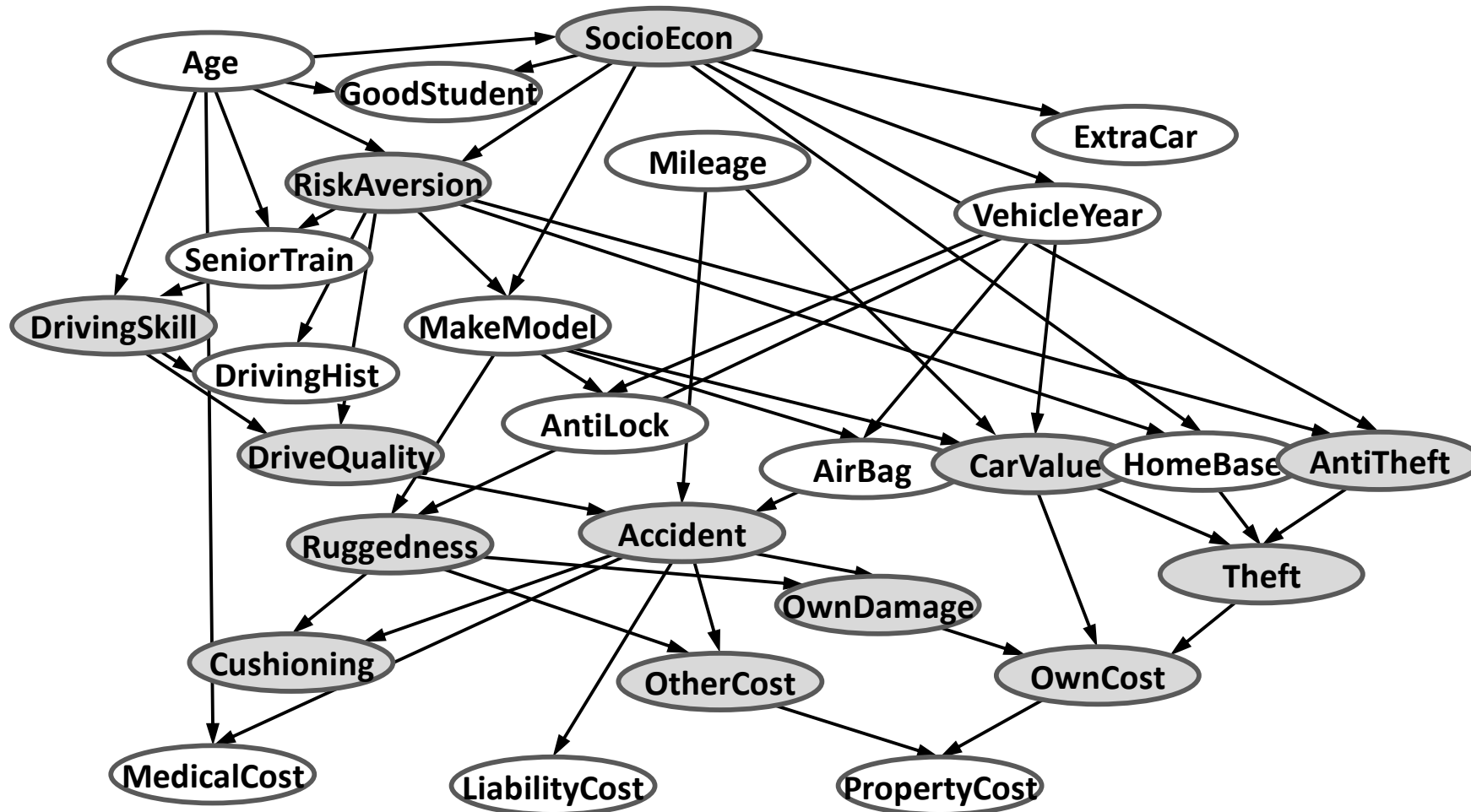
□ یک نام مناسب‌تر: مدل‌های گرافیکی

□ به وسیله‌ی شبکه‌ی بیز توضیح می‌دهیم متغیرها چگونه به صورت محلی با یکدیگر تعامل دارند.

□ تعاملات سراسری به صورت غیرمستقیم و در نتیجه‌ی این تعاملات محلی به دست می‌آیند.

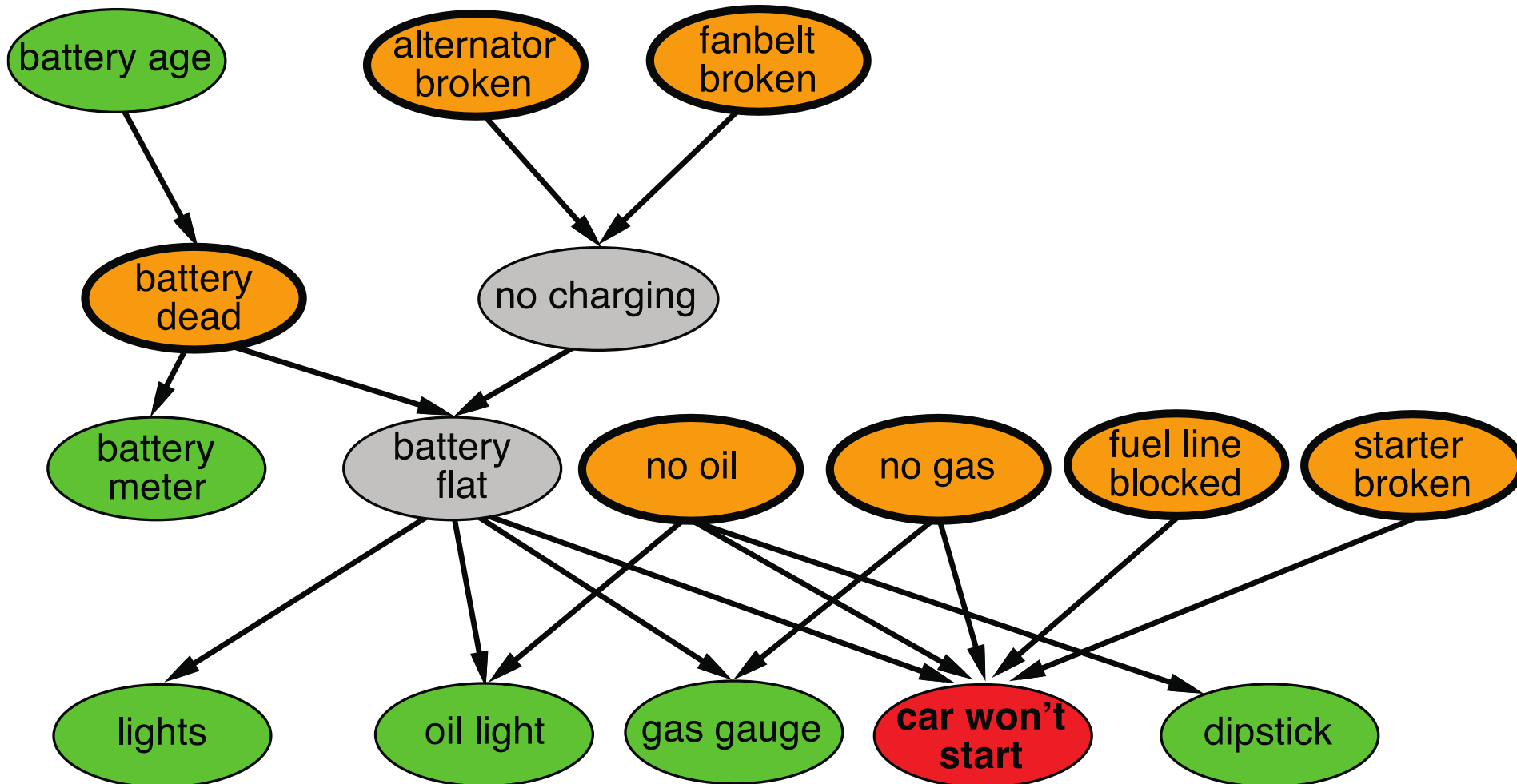
مثال شبکه‌ی بیز: بیمه

۱۶



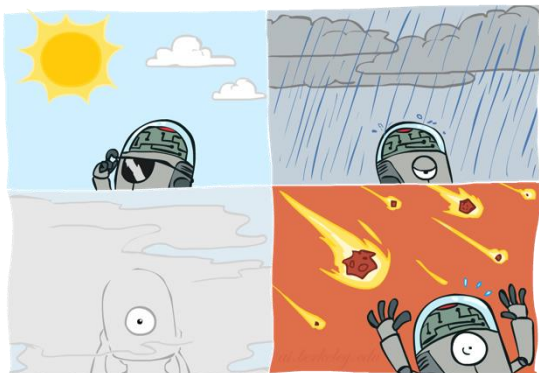
مثال شبکه‌ی بیز: خودرو

۱۷



مدل گرافیکی

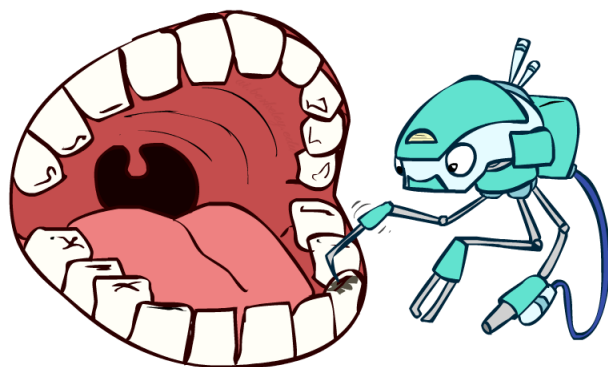
۱۸



Weather

□ رؤوس. متغیرها [و دامنه‌ها]

□ می‌توانند دارای مقدار (مشاهده شده)
یا بدون مقدار (مشاهده نشده) باشند.



Cavity

Toothache

Catch

□ یالها. تعاملات

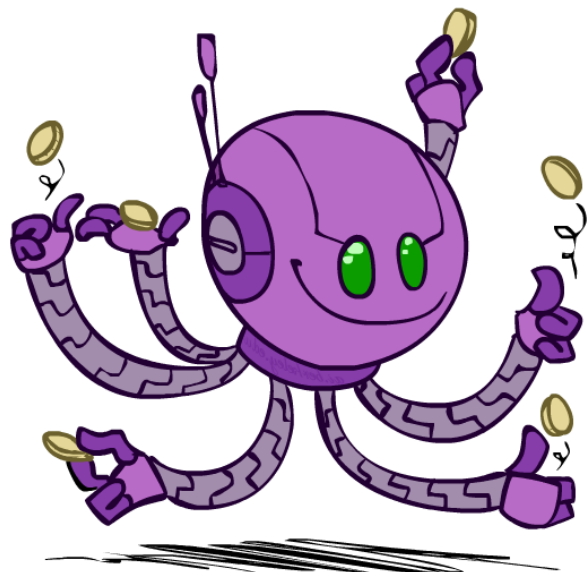
□ مانند محدودیت‌ها در یک CSP

□ بیانگر «تأثیر مستقیم»

□ به بیان رسمی: بیانگر وابستگی شرطی

مثال: پرتاب سکه

۱۹



□ n پرتاب مستقل سکه.

X_1

X_2

...

X_n

□ هیچ تعاملی بین متغیرها وجود ندارد: استقلال مطلق!

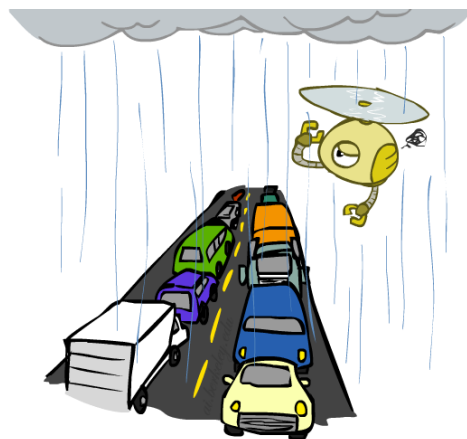
مثال: ترافیک (۱)

۲۰



R

T



R

T

□ مثال. ترافیک

□ متغیرها.

□ R : هوا بارانی است.

□ T : ترافیک وجود دارد.

□ مدل ۱. استقلال

□ مدل ۲. باران بر روی ترافیک تأثیر دارد.

□ س. چرا استفاده از مدل دوم برای عامل بهتر است؟

مثال: ترافیک (۲)

۲۱



□ مثال. ایجاد یک مدل علی برای ترافیک!

□ متغیرها.

□ R : هوا بارانی است.

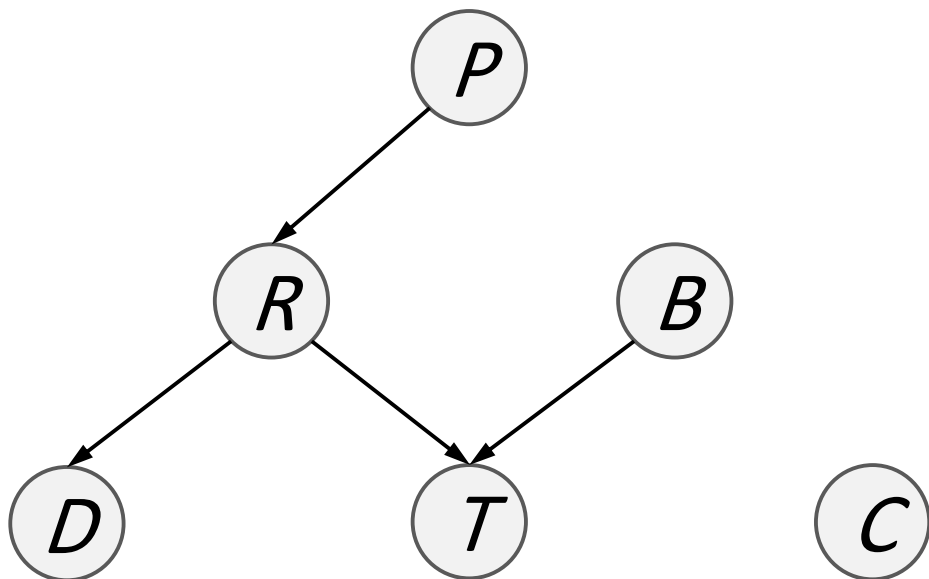
□ T : ترافیک وجود دارد.

□ P : فشار هوا پایین است.

□ D : سقف چکه می کند.

□ B : بازی فوتبال در جریان است.

□ C : دندان سوراخ است.



مثال: زنگ هشدار

۲۲

□ متغیرها.

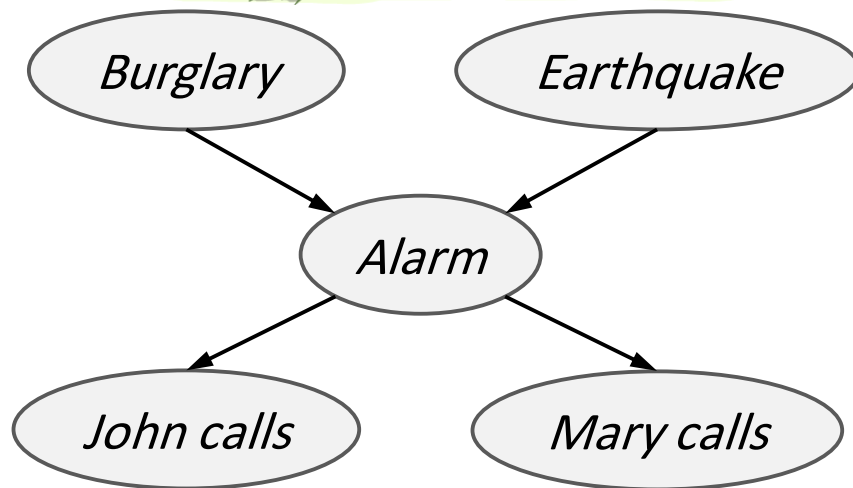
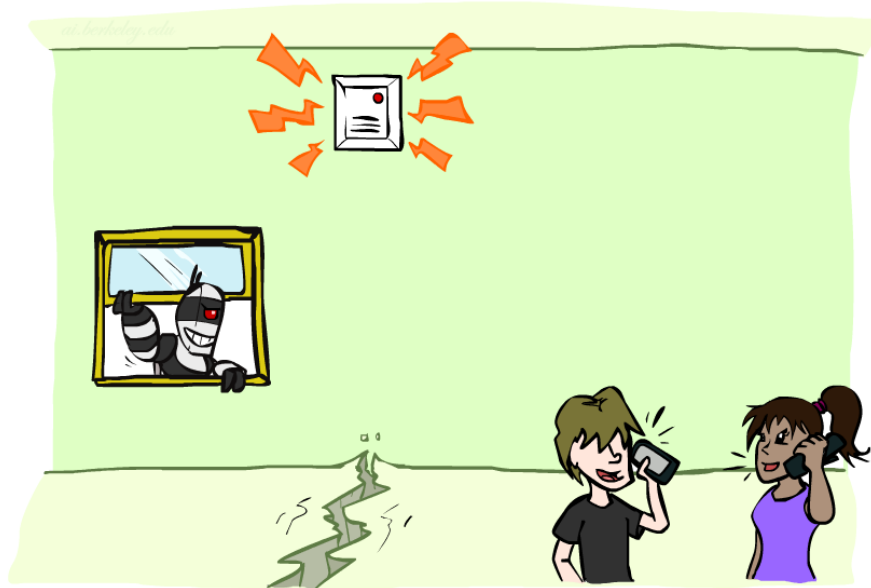
□ A: زنگ هشدار به صدا درآمده است.

□ B: سرقت رخ داده است.

□ E: زمین لرزه رخ داده است.

□ J: جان تماس گرفته است.

□ M: مری تماس گرفته است.



شبکه‌های بیز: معنا

۲۳

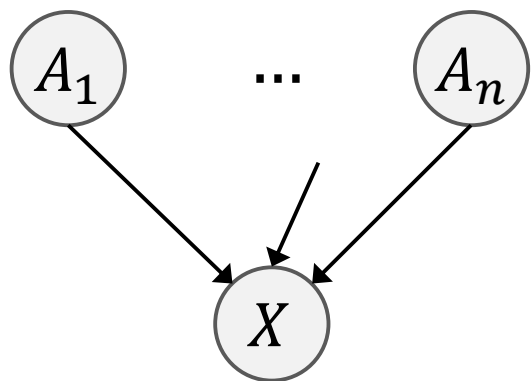




شبکه‌های بیز: معنا

۲۴

□ شبکه‌ی بیز.



$$P(X|A_1, A_2, \dots, A_n)$$

□ یک گراف جهت‌دار و بدون دور

□ هر رأس بیانگر یک متغیر تصادفی

□ به ازای هر رأس یک توزیع احتمالات شرطی

■ یک مجموعه از توزیع‌های احتمالی بر روی متغیر X ,

یک توزیع به ازای هر ترکیب ممکن از مقادیر والدین

$$P(X|Parents(X))$$

■ یک جدول توزیع احتمالات (CPT)

■ بیانگر یک فرایند «علّی» دارای نويز

شبکه‌ی بیز = توپولوژی (گراف) + احتمالات شرطی محلی



احتمالات در شبکه‌های بیز

۲۵

□ شبکه‌های بیز به صورت **ضمنی** بیانگر یک تابع توزیع احتمالات توأم هستند.

□ فرمول بازسازی شبکه بیز.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \text{parents}(x_i))$$

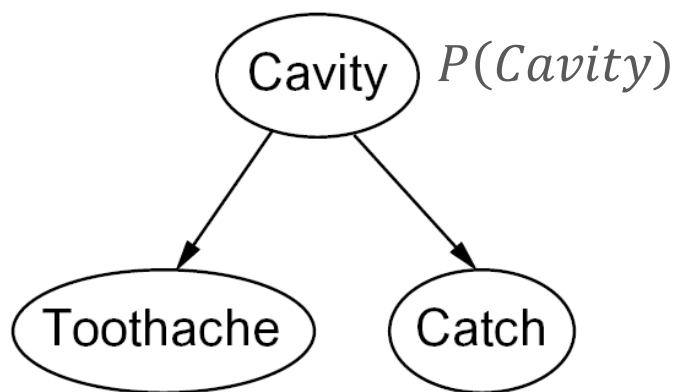
□ مثال.

$P(\text{Cavity}, \text{Catch}, \text{Toothache})$

$= P(\text{Cavity})$

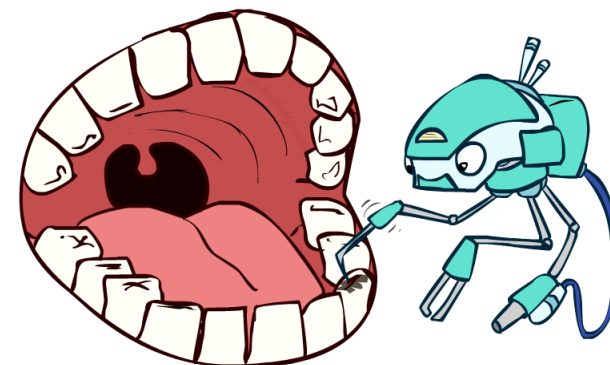
$\times P(\text{Catch} | \text{Cavity})$

$\times P(\text{Toothache} | \text{Cavity})$



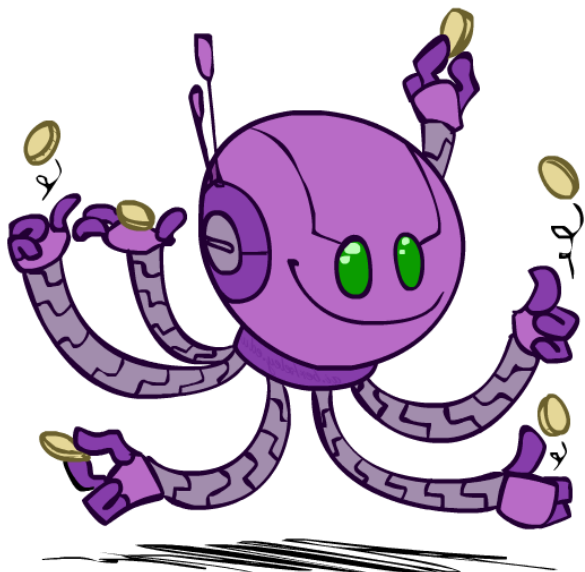
$P(\text{Toothache} | \text{Cavity})$

$P(\text{Catch} | \text{Cavity})$



مثال: پرتاب سکه

۲۶



X_1	X_2	...	X_n
$P(X_1)$	$P(X_2)$	...	$P(X_n)$
h 0.5	h 0.5	...	h 0.5
t 0.5	t 0.5	...	t 0.5

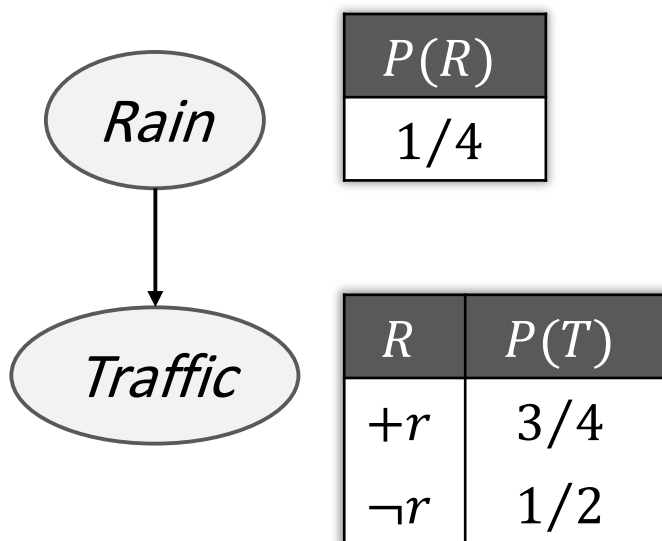
$$P(h, h, t, h) = P(h)P(h)P(t)P(h)$$

□ توجه. تنها آن دسته از توزیع‌هایی که متغیرهایشان کاملاً مستقل هستند، می‌توانند با یک شبکه‌ی بیز بدون یال نمایش داده شوند.

مثال: ترافیک

۲۷

□ مثال. ترافیک

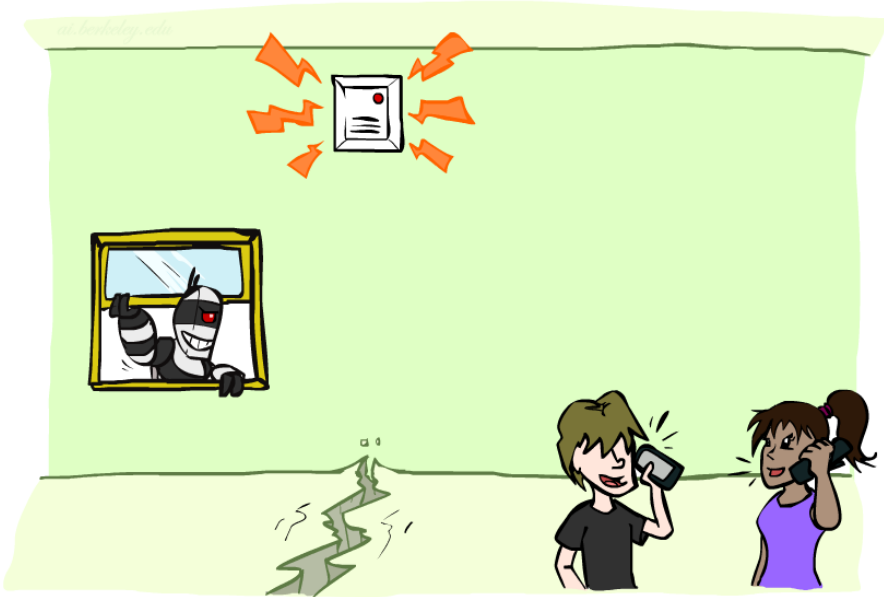


$$\begin{aligned} P(+r, \neg t) &= P(+r)P(\neg t|+r) \\ &= (1/4) \times (1/4) \end{aligned}$$



مثال: زنگ هشدار

۲۸

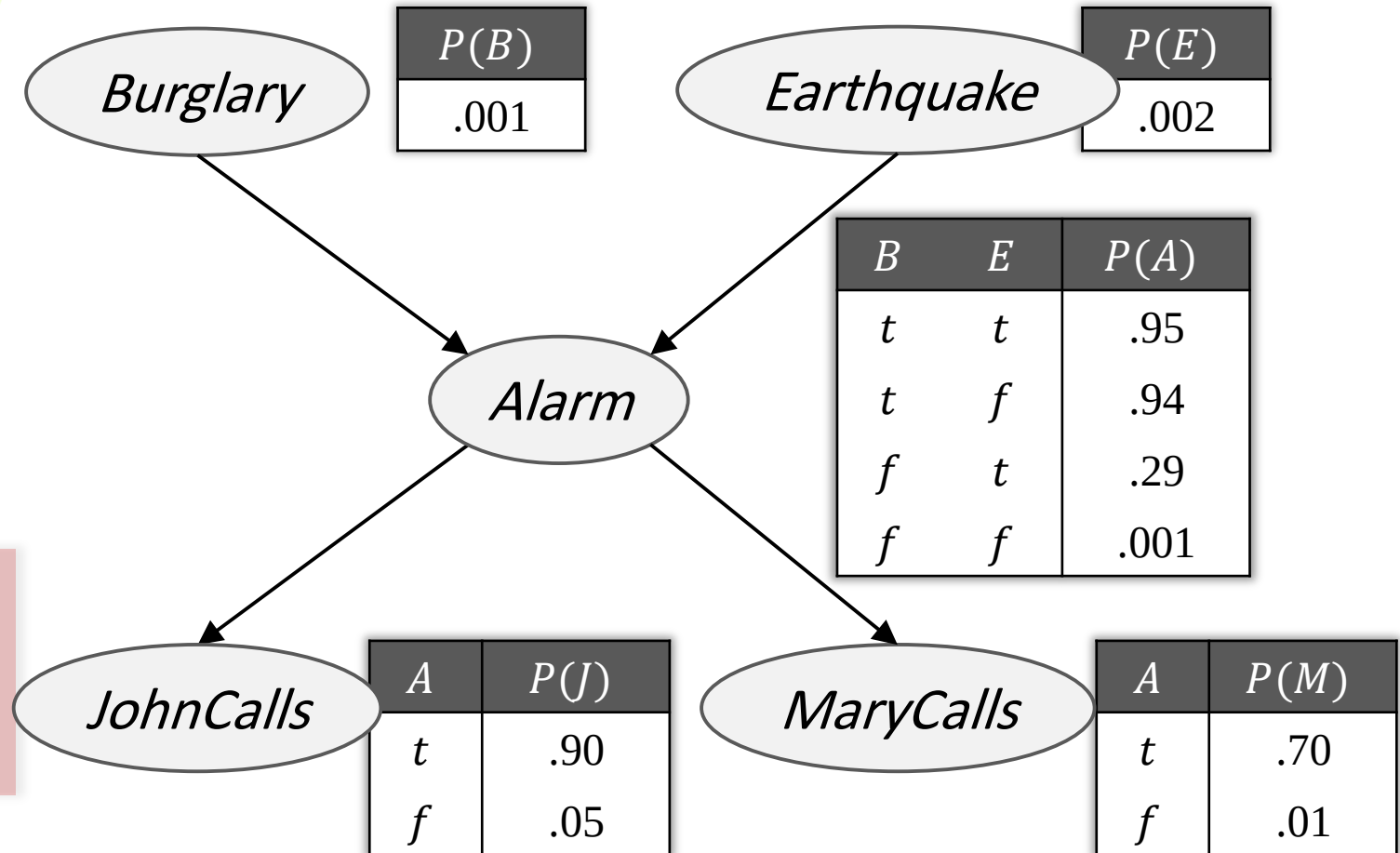


$$P(j, m, a, \neg b, \neg e)$$

$$= P(j|a)P(m|a)P(a|\neg b, \neg e)P(\neg b)P(\neg e)$$

$$= 0.90 \times 0.70 \times 0.001 \times 0.999 \times 0.988$$

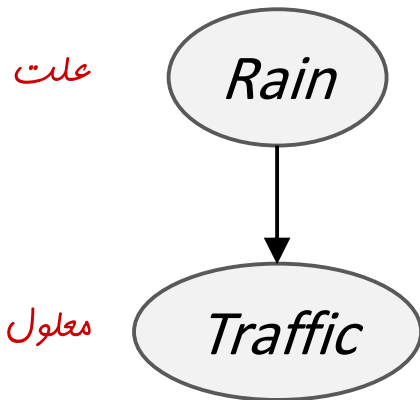
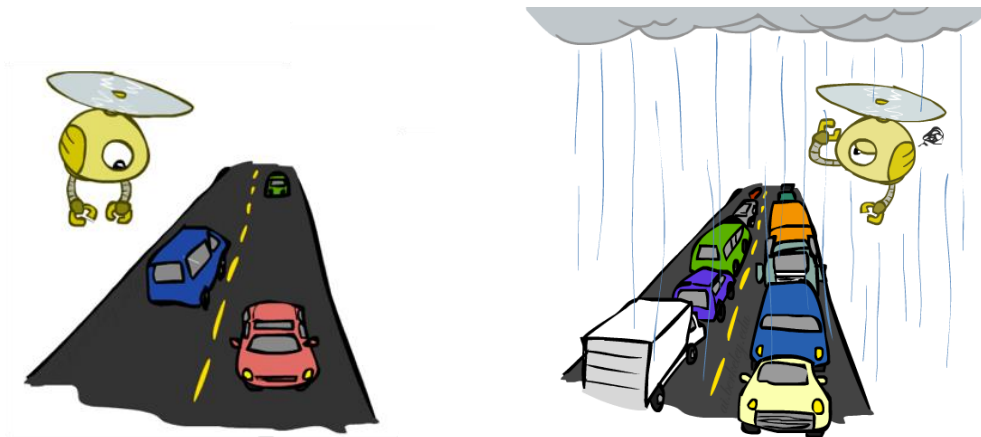
$$= 0.000628$$



مدل علی: ترافیک

۲۹

□ مدل علی. جهت یالها از علت به معلول.



$$P(R)$$

$P(R)$
.25

$$P(T|R)$$

R	$P(T)$
$+r$	.75
$\neg r$	.50

$$P(R, T)$$

B	E	$P(A)$
$+r$	$+t$	3/16
$+r$	$\neg t$	1/16
$\neg r$	$+t$	6/16
$\neg r$	$\neg t$	6/16

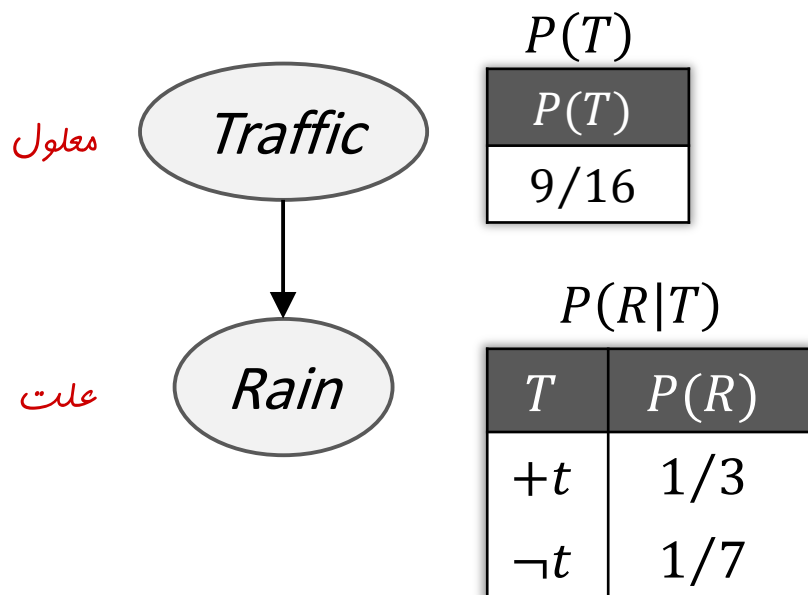
توزیع توأم

مدل تشخیصی: ترافیک

۳۰



□ مدل تشخیصی. جهت یالها از معلول به علت.



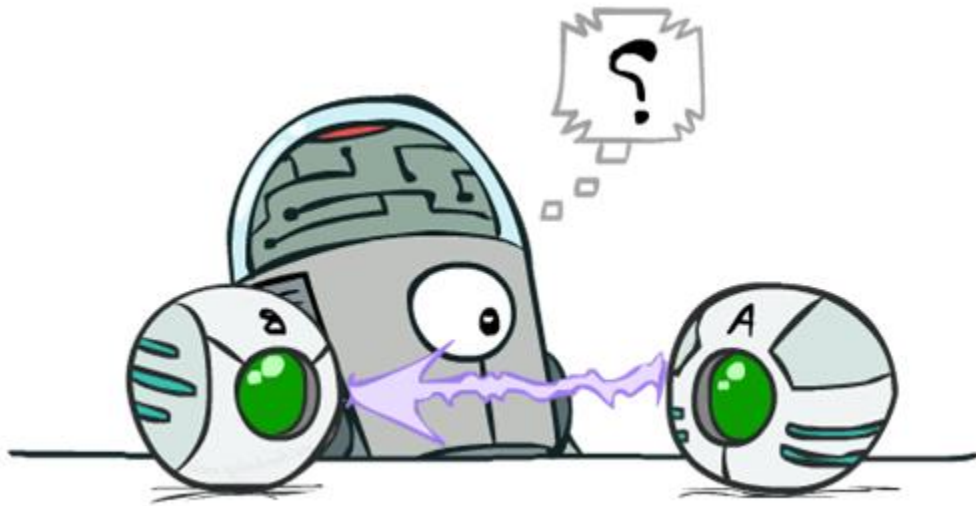
$P(R, T)$

B	E	$P(A)$
+r	+t	3/16
+r	¬t	1/16
¬r	+t	6/16
¬r	¬t	6/16

توزیع توأم

مدل علی یا تشخیصی؟

۳۱



□ س. چرا ما اغلب مدل علی را ترجیح می‌دهیم؟

□ معمولاً ساده‌تر [گره‌ها، والدین کمتری دارند]

□ فکر کردن درباره آن راحت‌تر

□ استخراج آن از افراد خبره ساده‌تر

■ به عنوان مثال پزشکان خبره بیشتر ترجیح می‌دهند

راجع به قواعد علی قضاوت احتمالاتی داشته باشند تا قواعد تشخیصی!

□ لازم نیست روابط بیان شده در شبکه‌های بیز حتماً روابط علی باشند.

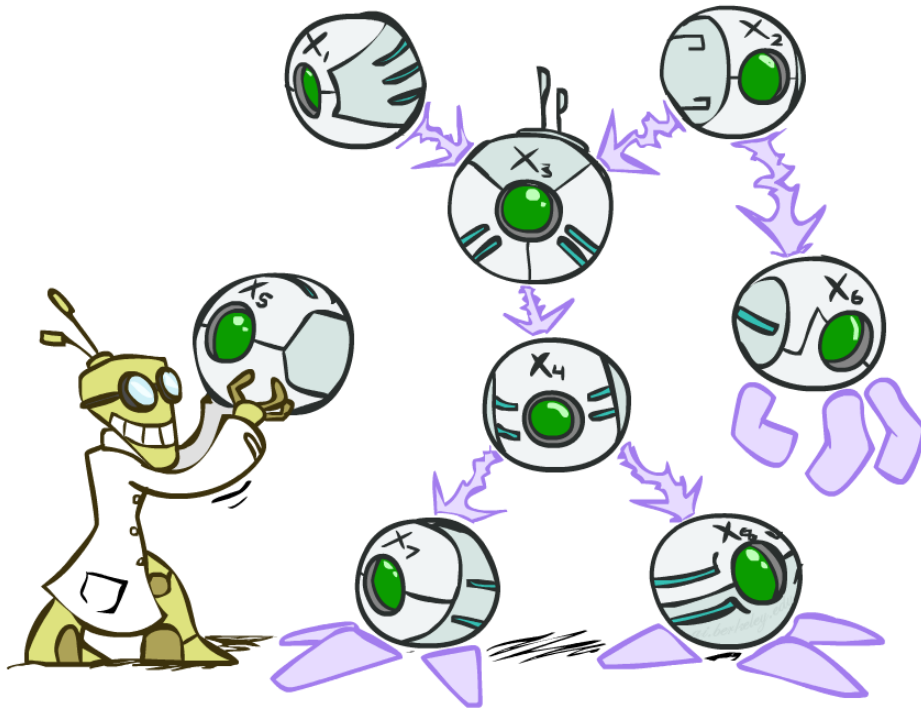
□ برخی مواقع یک شبکه‌ی علی بر روی دامنه وجود ندارد. [به ویژه اگر برخی از متغیرها در نظر نگرفته شده باشند]

□ مثلاً متغیرهای «ترافیک» و «چکیدن آب از سقف» را در نظر بگیرید.

□ در این مواقع یالها بیانگر روابط همبستگی بین متغیرها هستند و نه روابط علی.

شبکه‌های بیز

۳۲



□ تا اینجا دیدیم چگونه می‌توان از یک شبکه‌ی بیز برای نمایش یک توزیع توأم استفاده نمود.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \text{parents}(x_i))$$

□ در بخش بعد خواهیم دید چگونه می‌توان به پرسش‌ها درباره‌ی این توزیع پاسخ داد.

□ ایده اصلی: استقلال شرطی

□ هدف: بررسی تأثیر و استقلال شرطی متغیرها [رئوس شبکه بیز]

□ در نهایت به بررسی چگونگی استنتاج در شبکه‌های بیز خواهیم پرداخت.