

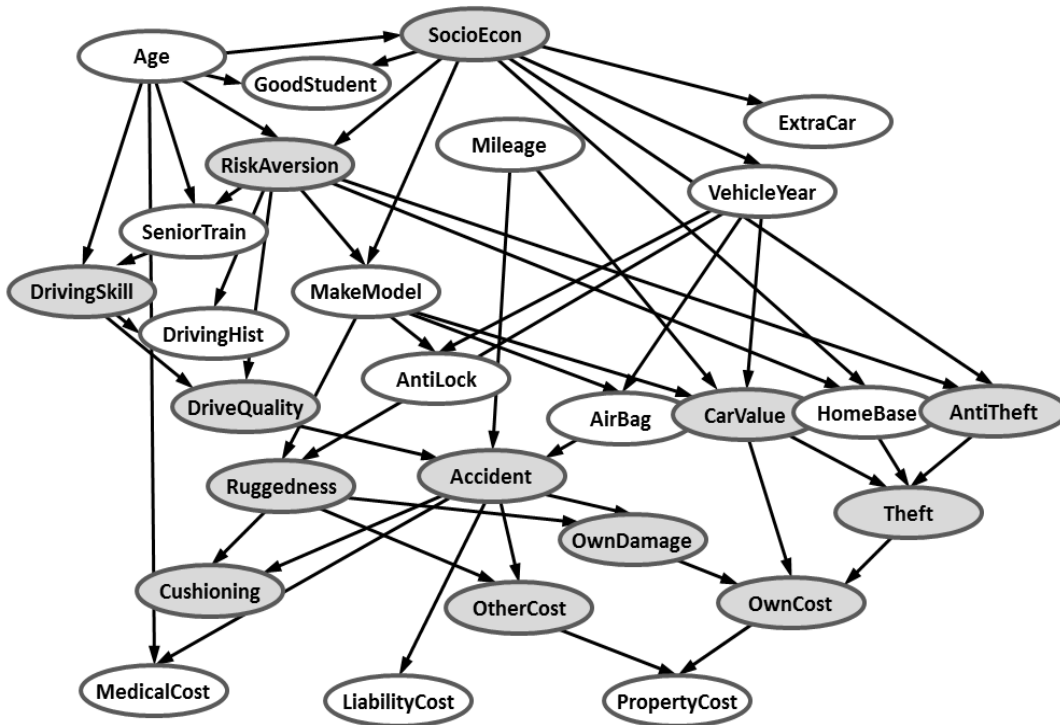
شبکه‌های بیز: استقلال شرطی

سید ناصر رضوی n.razavi@tabrizu.ac.ir

۱۳۹۵

شبکه‌های بیز

۲



□ شبکه‌های بیز. نمایش مدل احتمالاتی مربوط به یک دامنه به شکل مؤثر (فشرده).

□ مسایل مرتبط با شبکه‌های بیز:

□ استنتاج: با داشتن یک شبکه بیز، احتمال $P(X|e)$ چیست؟

□ بازنمایی: با گراف مربوط به یک شبکه بیز، کدام یک از توزیع‌ها را می‌توان نمایش داد؟

□ مدل‌سازی: برای یک دامنه مفروض، کدام شبکه بیز مناسب‌تر است؟

اندازه شبکه بیز

۳

□ س. اندازه یک توزیع توأم شامل N متغیر بولی چیست؟

بر حسب N نمایی $2^N - 1$

□ س. با این فرض که هر رأس حداکثر k رأس والد داشته باشد، اندازه یک شبکه بیز با N رأس چیست؟

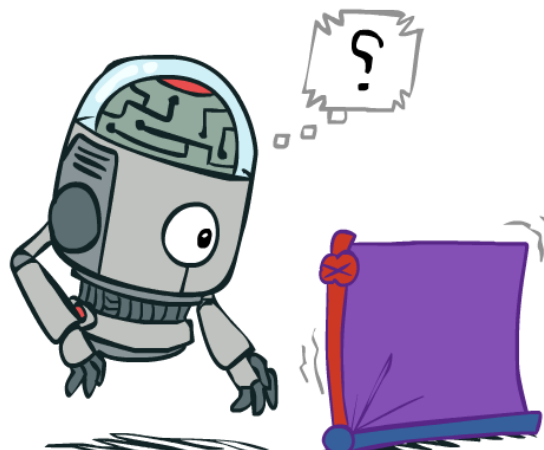
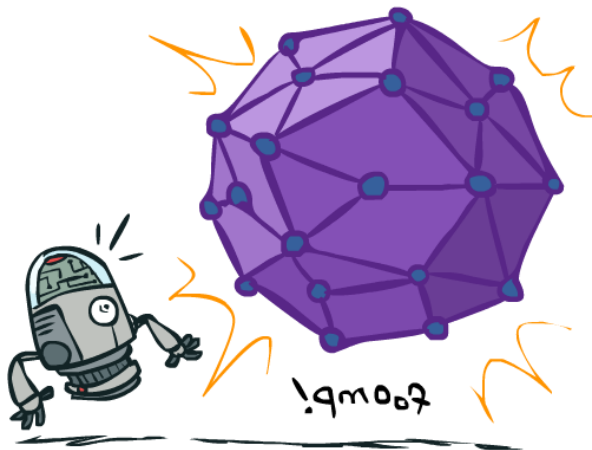
$$\sum_{i=1}^N 2^{|parents(X_i)|} \leq \sum_{i=1}^N 2^k = 2^k N$$

بر حسب N خطی

□ مثال. $N = 30, k = 5$

□ توزیع توأم: بیش از یک میلیارد

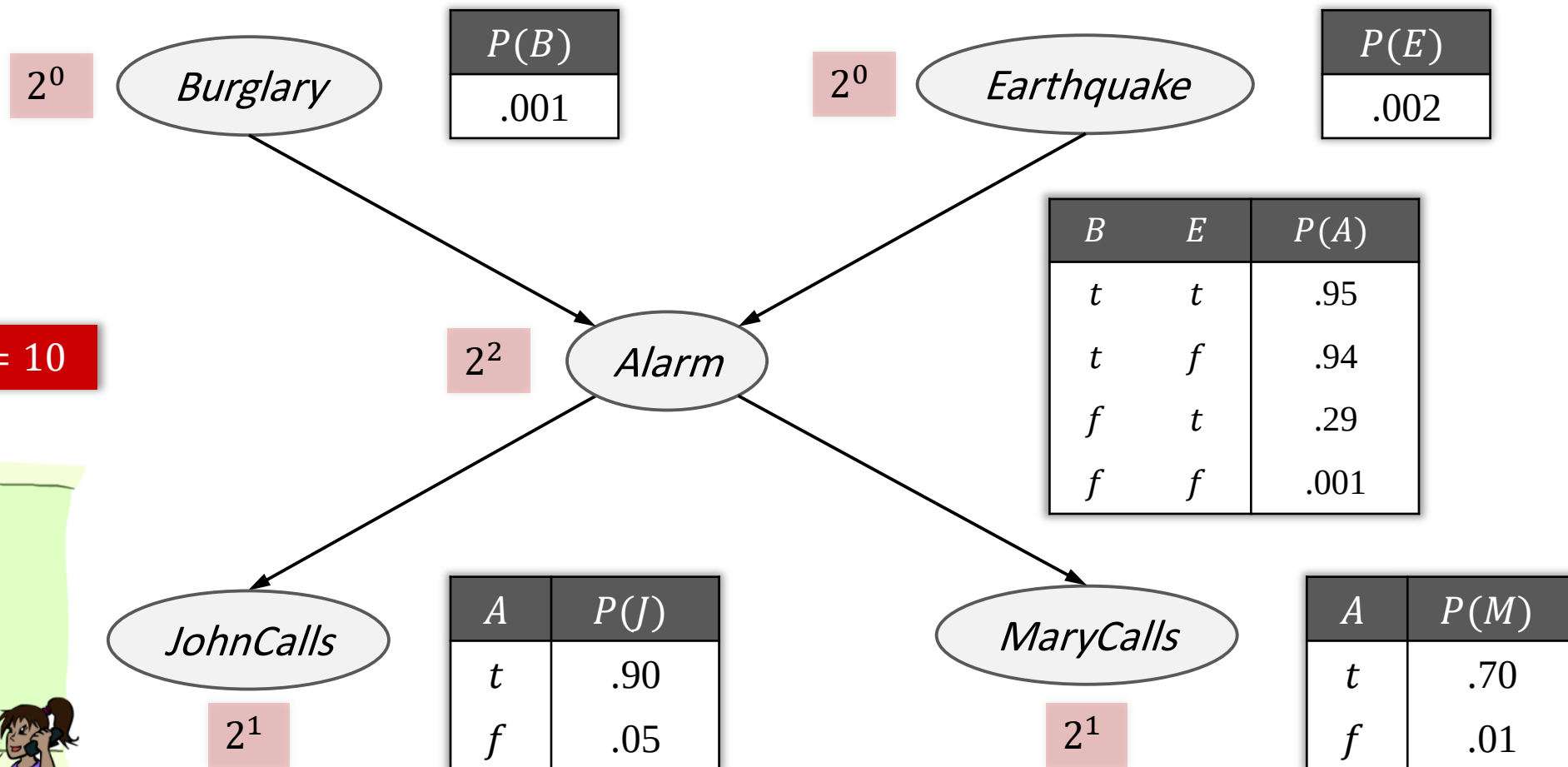
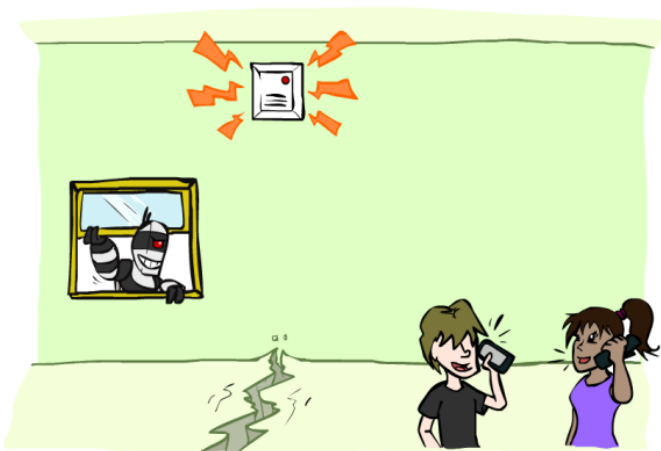
□ شبکه بیز: حداکثر ۹۶۰



اندازه شبکه بیز

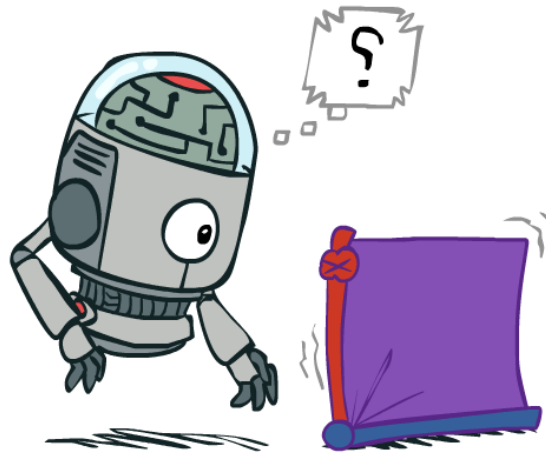
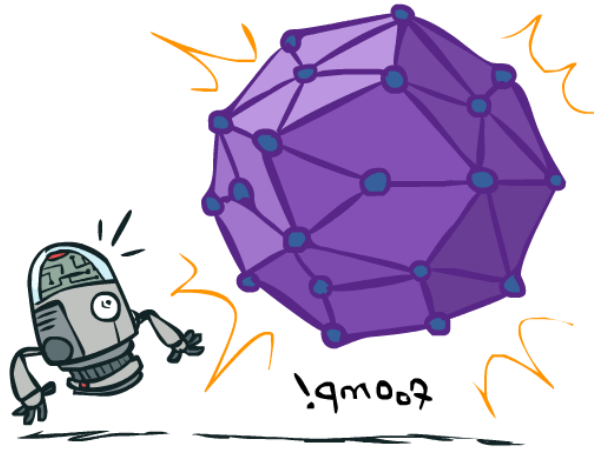
۴

$$2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 = 10$$



اندازه شبکه بیز

۵



□ مقایسه اندازه.

□ توزیع توأم: نمایی $[2^N]$

□ شبکه بیز: خطی $[2^k N]$

□ هر دو مدل امکان محاسبه $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را فراهم می کنند.

□ مزایای شبکه بیز.

□ صرفه جویی قابل ملاحظه در مصرف حافظه [خطی در برابر نمایی]

□ استخراج جدول های مربوط به توزیع های شرطی محلی ساده تر

□ در پاسخ دادن به پرسش ها سریع تر

بازسازی توزیع توأم از شبکه بیز

۶

□ فرمول بازسازی شبکه بیز.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \text{parents}(x_i))$$

□ معمولاً هیچ دلیلی وجود ندارد که بخواهیم تمام عناصر توزیع توأم را یک جا تولید کنیم.

□ بنابراین، هر زمان به عنصری نیاز داشته باشیم، همان موقع آن را محاسبه می‌کنیم.

□ به منظور تأکید دوباره.

□ شبکه‌های بیز بر روی دامنه خود به طور **ضمنی** یک توزیع توأم تعریف می‌کنند، که با استفاده از توزیع‌های شرطی محلی و ساختار گراف قابل تعیین است.

استقلال شرطی

۷

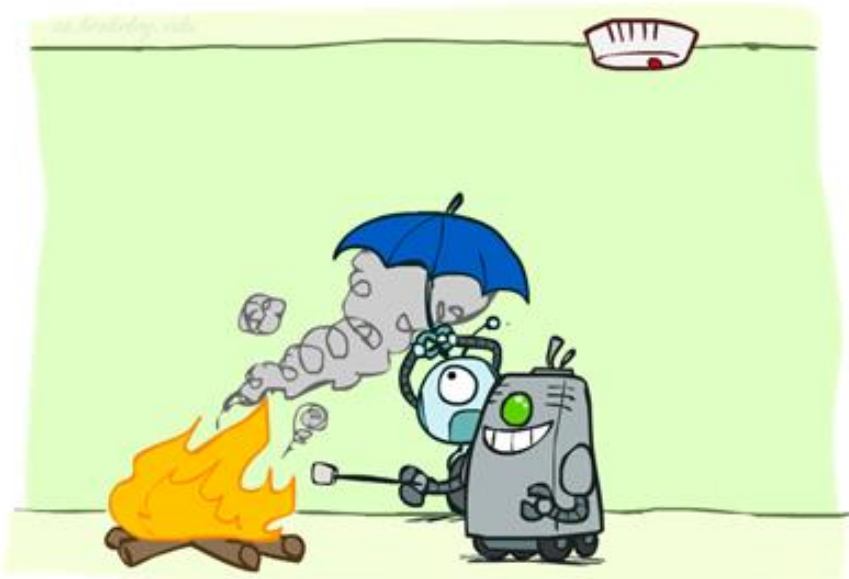
□ یادآوری. استقلال و استقلال شرطی
□ X و Y مستقل هستند، اگر

$$\forall x, y : P(x, y) = P(x)P(y) \Leftrightarrow X \perp Y$$

□ X و Y مستقل شرطی هستند، اگر

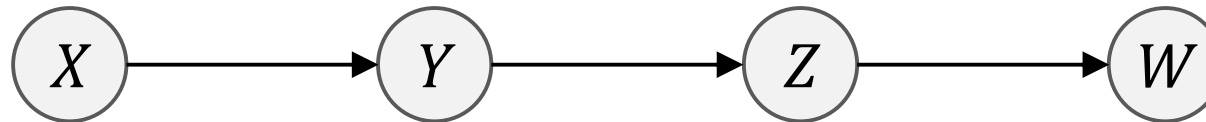
$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z) \Leftrightarrow X \perp Y | Z$$

□ توجه. استقلال و استقلال شرطی ویژگی‌های مربوط
به توزیع هستند.



$Alarm \perp Fire | Smoke$

استقلال شرطی: مثال



□ فرضیات مربوط به استقلال‌های شرطی که مستقیماً از ساده‌سازی‌های قاعده زنجیری می‌آیند:

$$\text{Chain Rule : } P(X, Y, Z, W) = P(X)P(Y|X)P(Z|X, Y)P(W|X, Y, Z)$$

$$\text{BNRF : } P(X, Y, Z, W) = P(X)P(Y|X)P(Z|Y)P(W|Z)$$

$$Z \perp X \mid Y$$

$$W \perp X \mid Z$$

$$W \perp Y \mid Z$$

$$W \perp X \mid Y$$

□ فرضیات مربوط به استقلال‌های شرطی که به طور غیرمستقیم می‌توان نتیجه گرفت:

استقلال شرطی در BN

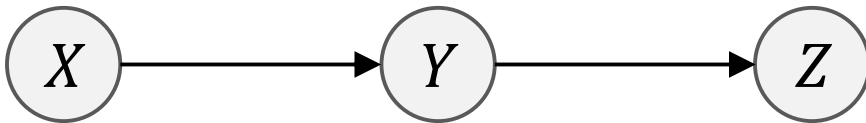
۹

□ پرسش‌های مهم در مورد شبکه بیز.

□ آیا با داشتن مجموعه‌ای از شواهد، دو رأس مفروض مستقل هستند؟

□ اگر پاسخ مثبت است، می‌توان با عملیات جبری آن را ثابت نمود.

□ اگر پاسخ منفی است، می‌توان یک مثال نقض ارائه نمود.



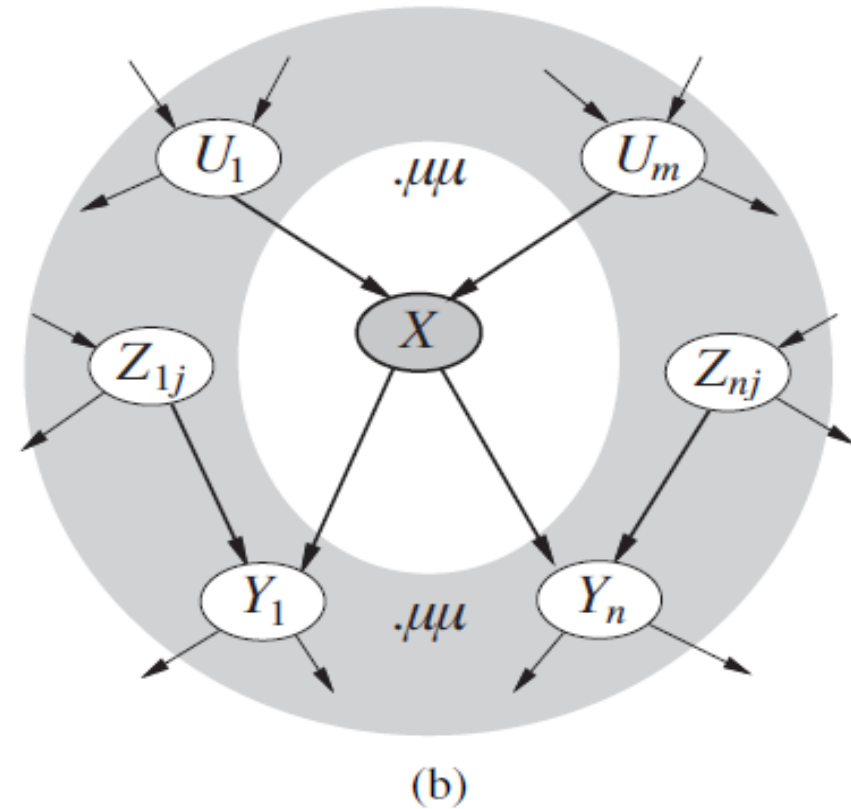
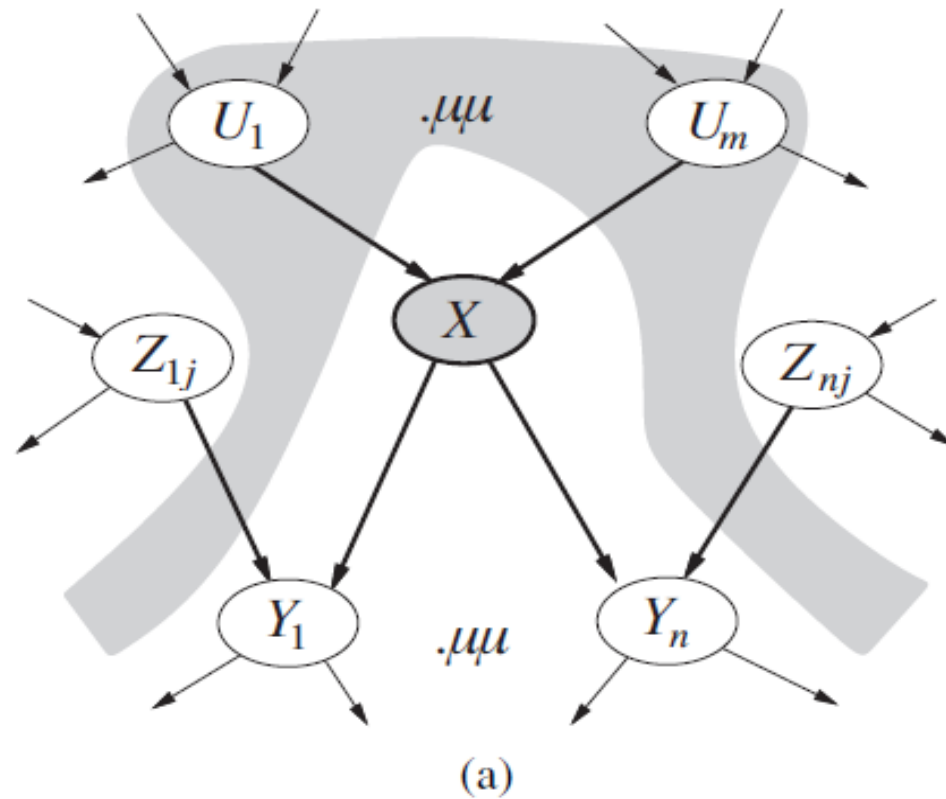
□ مثال. آیا X و Z لزوماً مستقل هستند؟

□ خیر، مثلاً کاهش فشار باعث ریزش باران می‌شود و ریزش باران باعث افزایش ترافیک می‌شود.

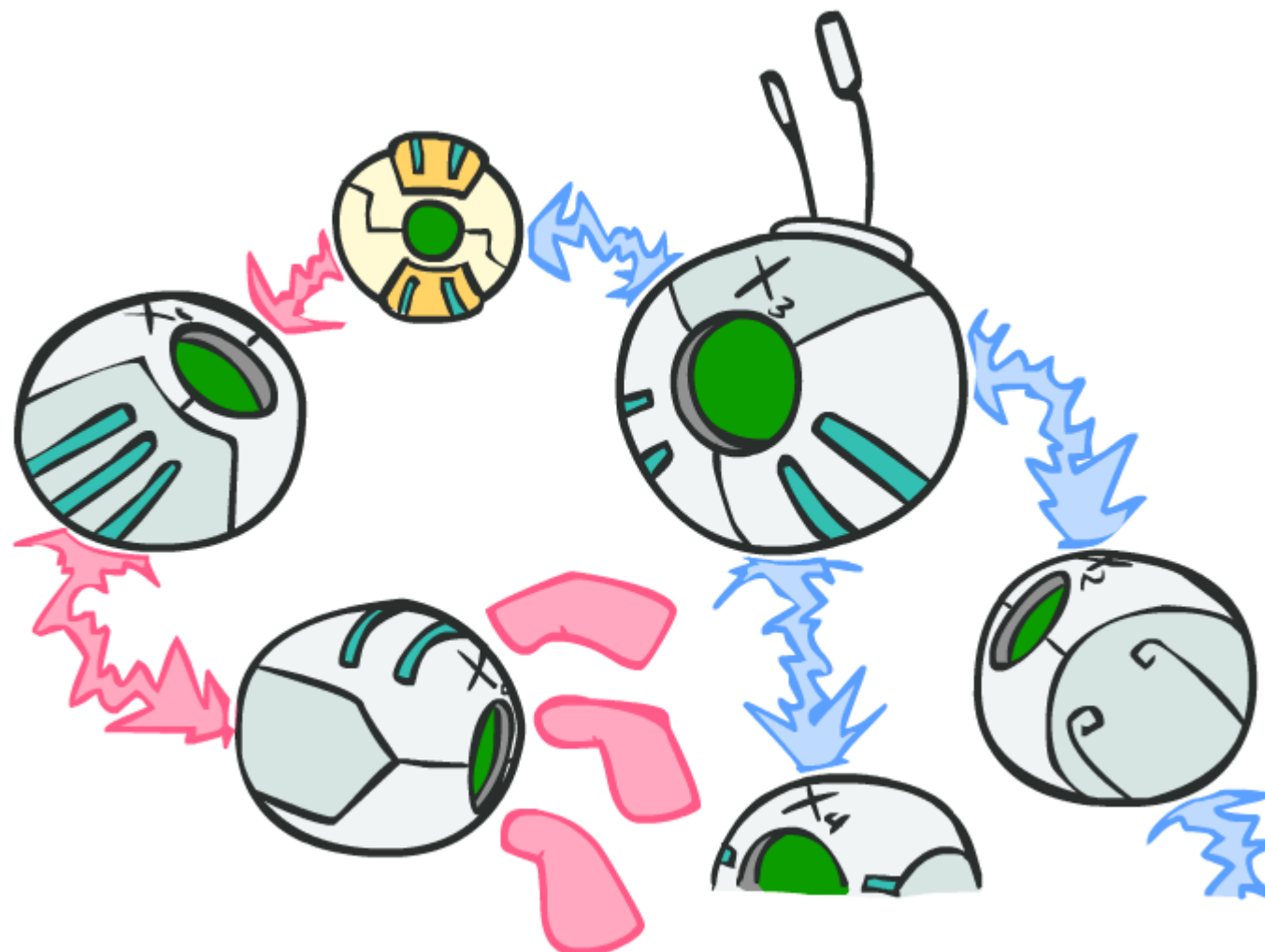
□ در نتیجه، X و Z می‌توانند بر روی یکدیگر تأثیر بگذارند. [از طریق Y]

استقلال شرطی در BN

۱۰



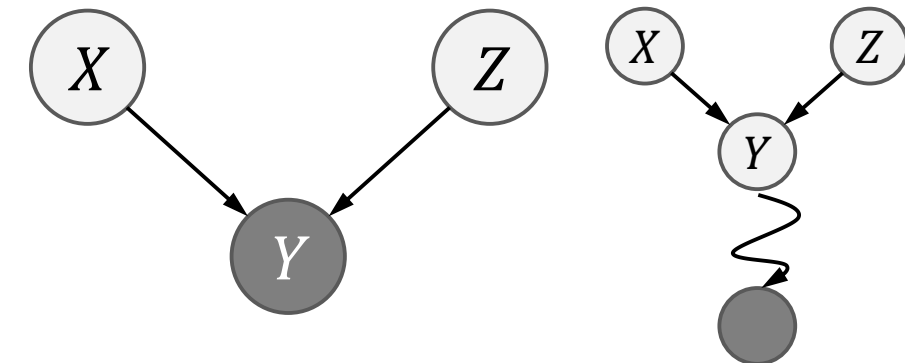
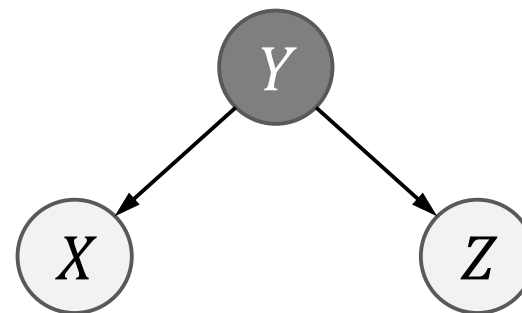
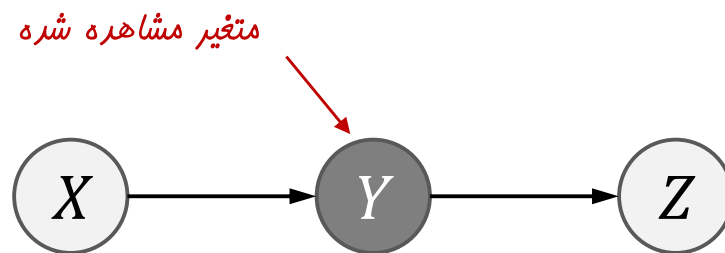
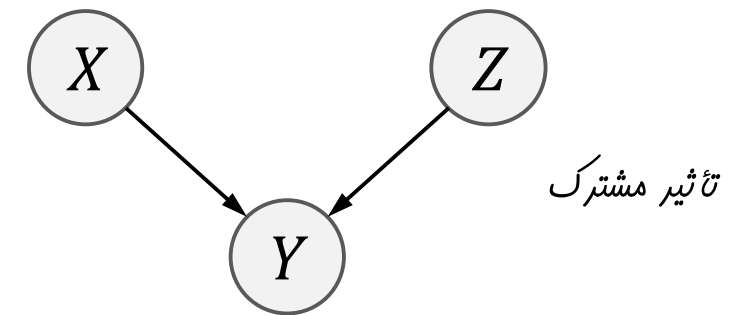
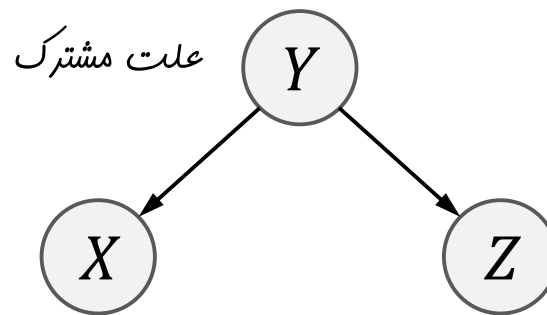
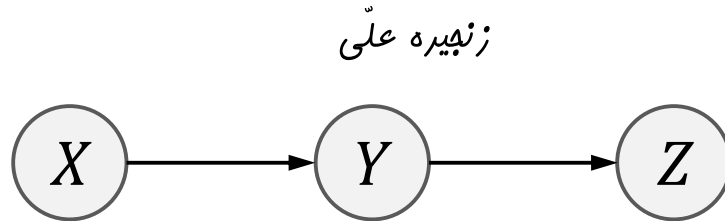
D-جدایی: طرح کلی



D-جدایی: طرح کلی

۱۲

□ مطالعه وابستگی و استقلال بر روی سه تایی‌ها.



□ توجه. هر شبکه پیچیده را می‌توان تنها با استفاده از این سه حالت استاندارد تحلیل نمود.

زنجیره‌های علیّ

۱۳

□ زنجیره علیّ.

□ آیا X و Z ضرورتاً مستقل هستند؟ خیر!

□ یک مجموعه از جداول توزیع شرطی که در آنها X از Z مستقل نیست، برای نشان دادن این که چنین استقلالی تضمین نشده کافیست.

□ مثال. فشار پایین باعث ریزش باران و ریزش باران باعث ایجاد ترافیک می‌شود.



X: Low pressure

Y: Rain

Z: Traffic

$$P(x, y, z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

زنجیره‌های علی

۱۴

□ آیا با دانستن Y ، متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل هستند؟ **بله!**

$$\begin{aligned} P(z|x, y) &= \frac{P(x, y, z)}{P(x, y)} \\ &= \frac{P(x)P(y|x)P(z|y)}{P(x)P(y|x)} \\ &= P(z|y) \end{aligned}$$

□ نتیجه. شواهد مانع از انتشار تاثیر در طول زنجیره می‌شود.

□ زنجیره علی.



X : Low pressure

Y : Rain

Z : Traffic

$$P(x, y, z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

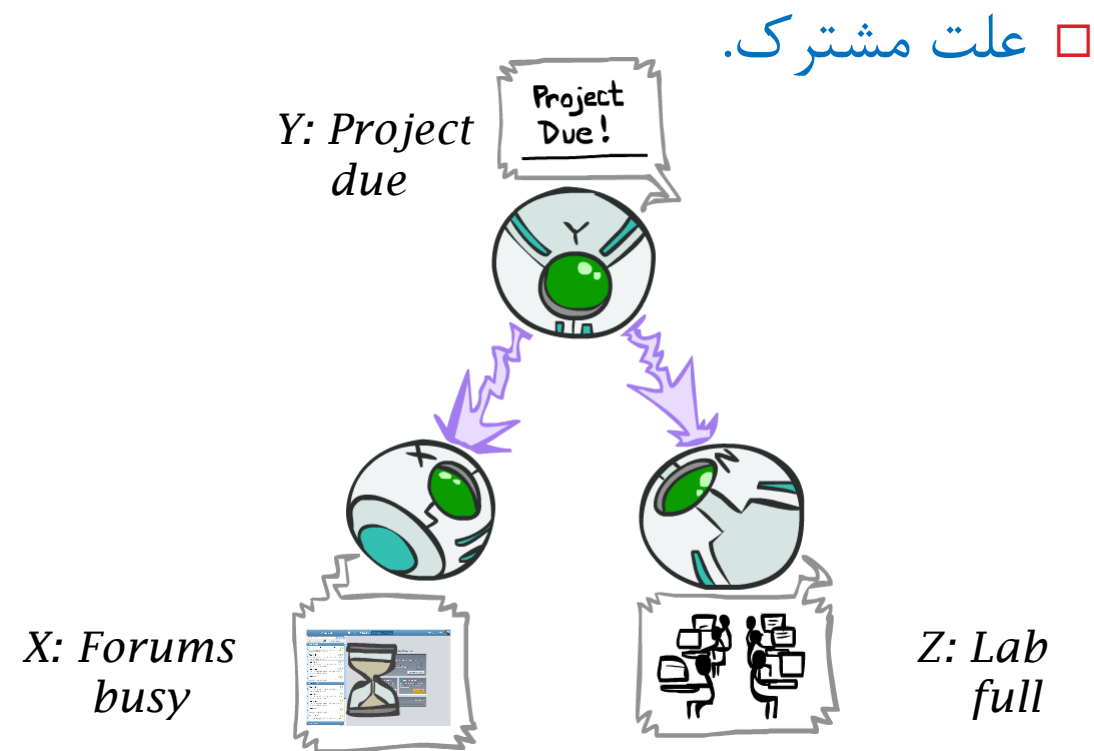
علت مشترک

۱۵

□ آیا X و Z ضرورتاً مستقل هستند؟ خیر!

□ یک مجموعه از جداول توزیع شرطی که در آنها X از Z مستقل نیست، برای نشان دادن این که چنین استقلالی تضمین نشده کافیست.

□ مثال. سر رسیدن موعد تحویل پروژه هم باعث شلوغ شدن تالارهای گفتگو و هم باعث پر شدن آزمایشگاه می‌شود.



$$P(x, y, z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

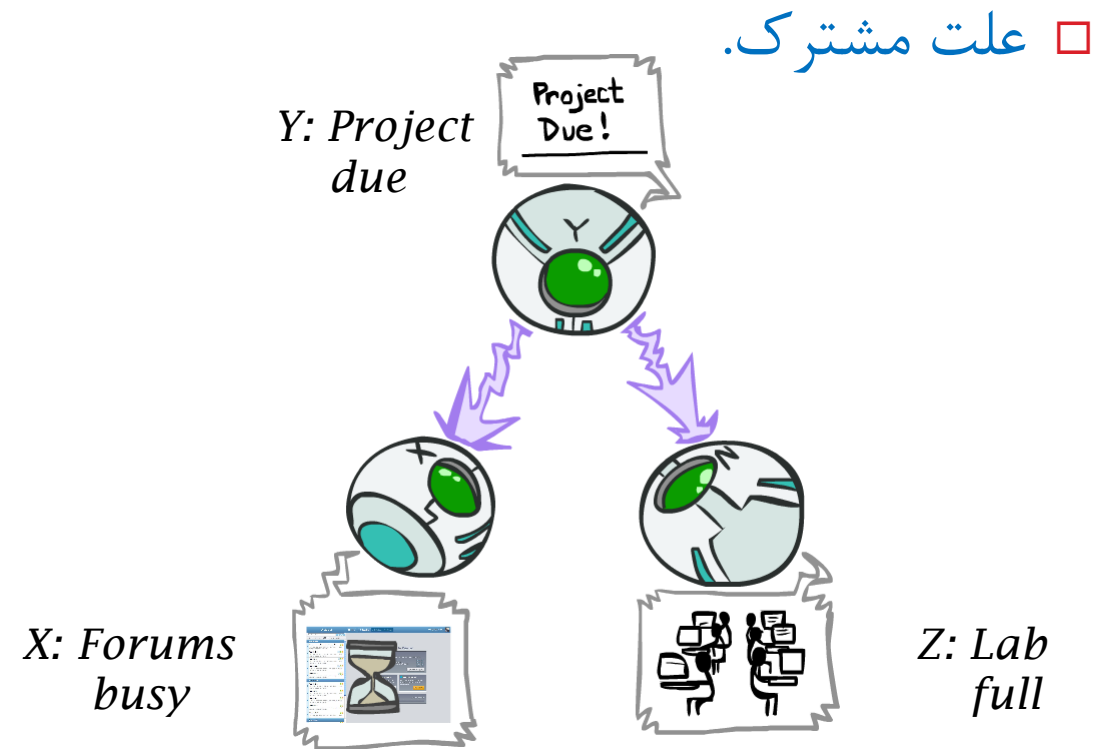
علت مشترک

۱۶

□ آیا با دانستن Y ، متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل هستند؟ **بله!**

$$\begin{aligned} P(z|x, y) &= \frac{P(y, x, z)}{P(y, x)} \\ &= \frac{P(y)P(x|y)P(z|y)}{P(y)P(x|y)} \\ &= P(z|y) \end{aligned}$$

□ نتیجه. مشاهده علت مانع از انتشار تاثیر میان معلول‌ها می‌شود.



$$P(x, y, z) = P(y)P(x|y)P(z|y)$$

تأثیر مشترک

۱۷

□ آیا X و Z ضرورتاً مستقل هستند؟ بله!

□ مثال. اگرچه بارندگی و برگزاری مسابقه فوتبال هر دو باعث ایجاد ترافیک می‌شوند، اما بین این دو همبستگی وجود ندارد.

□ اما این موضوع نیاز به اثبات دارد!

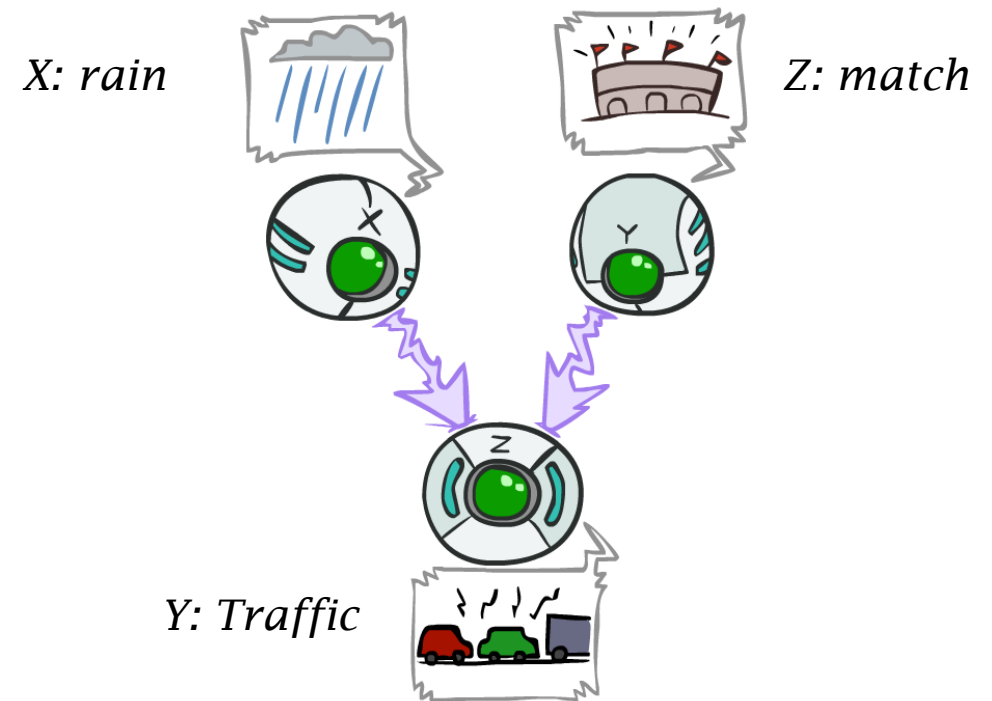
$$P(x, z, y) = P(x)P(z)P(y|x, z)$$

شبکه بیز

$$P(x, z, y) = P(x)P(z|x)P(y|x, z)$$

قاعده زنجیری

□ تأثیر مشترک. [ساختار v]



$$P(x, y, z) = P(x)P(z)P(y|x, z)$$

تأثیر مشترک

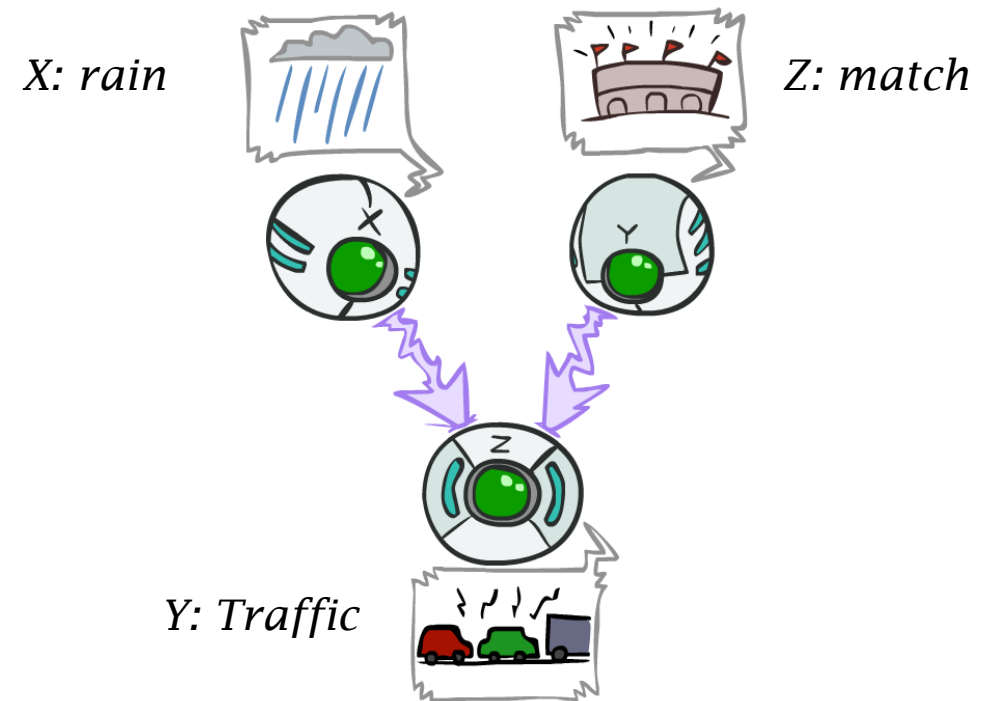
۱۸

□ آیا با دانستن Y ، متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل هستند؟ خیر!

- زیرا با دانستن این که ترافیک وجود دارد، اگر بدانیم مسابقه فوتبال برگزار می‌شود، آنگاه میزان بارش ما نسبت به بارش باران کاهش می‌یابد و بالعکس.
- به عبارت دیگر مشاهده ترافیک، باعث ایجاد رقابت بین بارندگی و برگزاری مسابقه به عنوان دو توضیح ممکن برای علت بروز ترافیک می‌شود.

□ نتیجه. مشاهده معلول، باعث فعال شدن تأثیر میان علت‌های ممکن می‌شود.

□ تأثیر مشترک. [ساختار v]



$$P(x, y, z) = P(x)P(z)P(y|x, z)$$

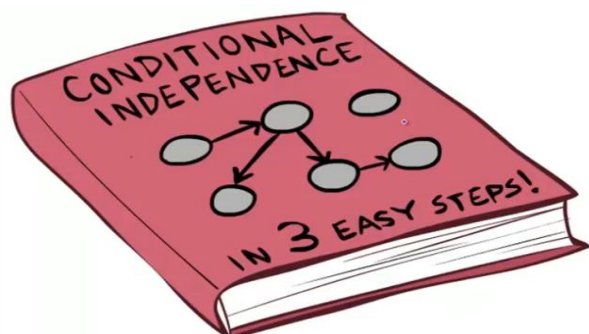
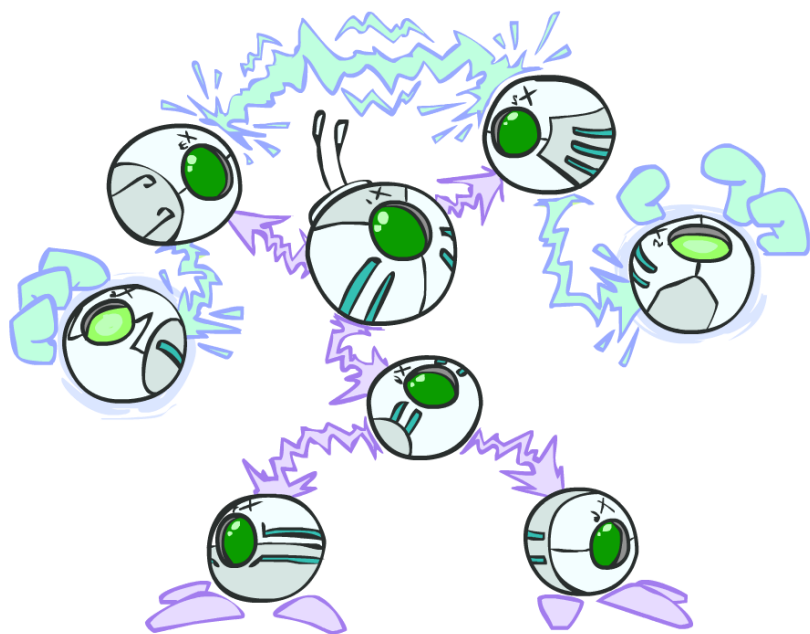


حالت کلی

۲۰

□ پرسش. در یک شبکه بیز داده شده، آیا دو متغیر مفروض مستقل هستند؟ [با توجه به شواهد]

□ راه حل. تحلیل گراف!



□ هر شبکه پیچیده را می توان تنها با استفاده از سه حالت استاندارد تحلیل نمود.

دسترس پذیری

۲۱

□ دستورالعمل.

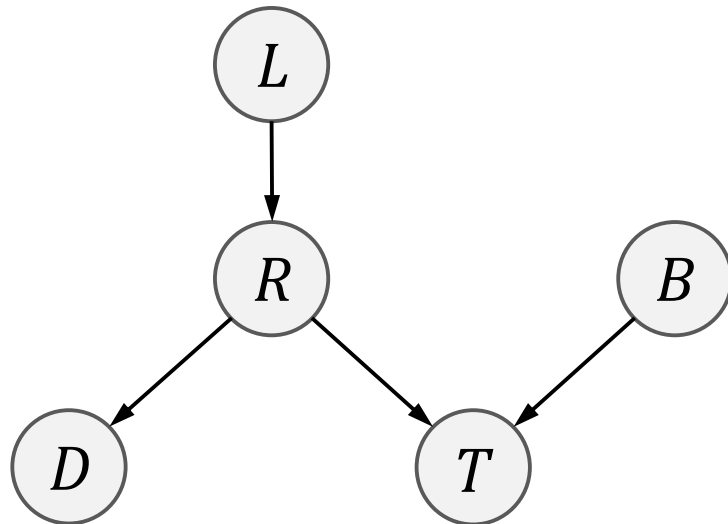
□ متغیرهای مشاهده شده را سایه بزن،

□ در گراف حاصل به دنبال مسیرهای ممکن بگرد.

□ **تلاش اول.** اگر دو رأس مورد نظر به وسیله یک مسیر بدون جهت که با هیچ رأس سایه‌داری مسدود نشده است به هم وصل باشند، آنگاه آن دو رأس مستقل شرطی هستند.

□ یک استثنا. ساختار v

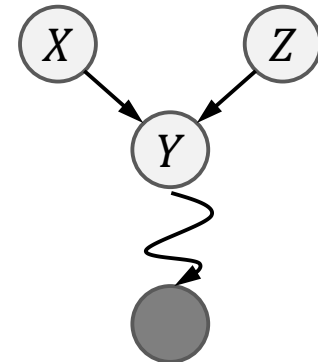
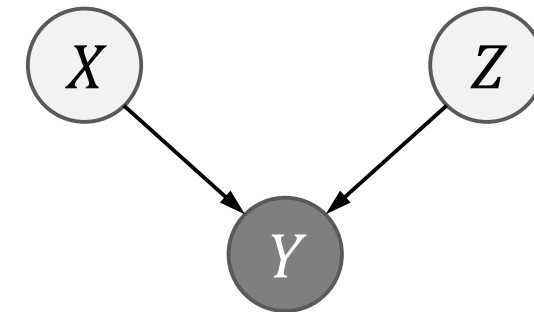
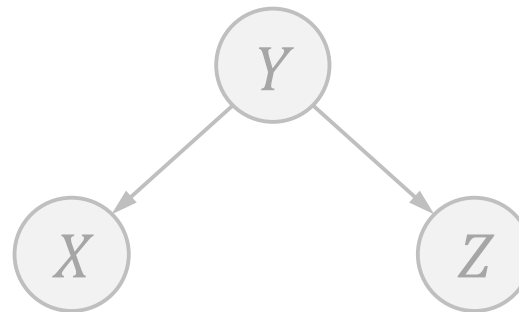
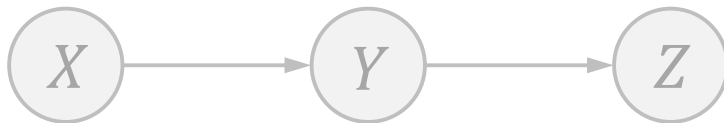
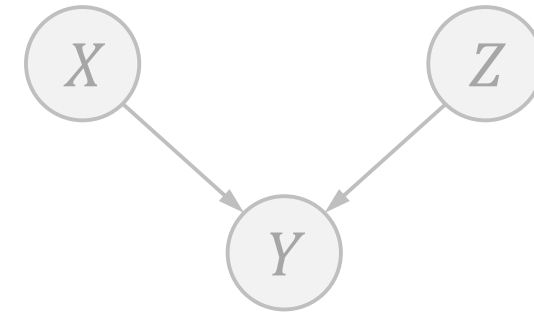
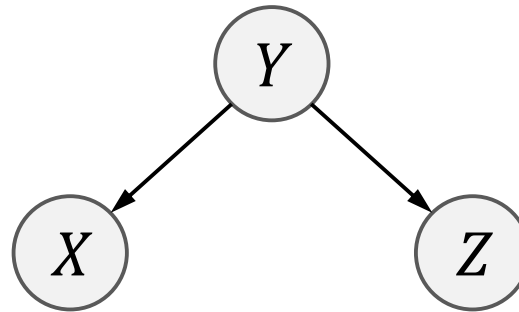
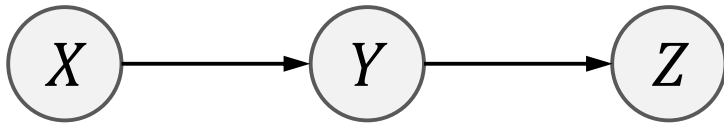
□ ساختار v موجود در رأس T به عنوان یک پیوند در مسیر در نظر گرفته نمی‌شود، مگر این که فعال باشد.



D-جدایی: طرح کلی

۲۲

□ سه‌تایی‌های فعال.



□ سه‌تایی‌های فعال. سه‌تایی (X, Y, Z) یک سه‌تایی فعال است اگر با توجه به شواهد موجود، متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل نباشند.

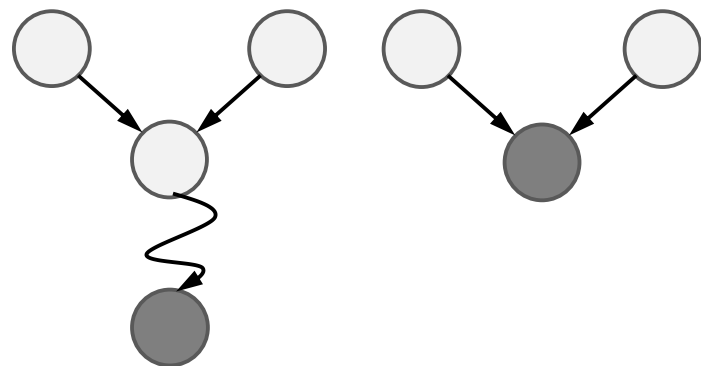
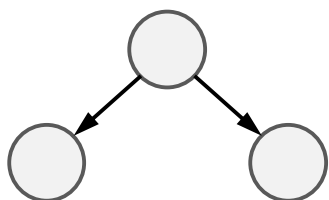
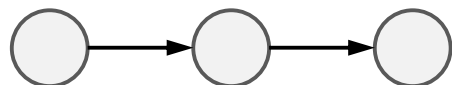
حالت کلی: جدایی D

۲۳

- **مسیر فعال.** مسیر بدون جهت $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ با دانستن شواهد، یک مسیر فعال است اگر هر سه تایی موجود در آن به صورت (X_{-1}, X_0, X_{+1}) یک سه تایی فعال باشد.
- **گزاره.** متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل نیستند اگر حداقل یک مسیر فعال بین آنها وجود داشته باشد (با دانستن شواهد).
- **یک گزاره معادل.** متغیرهای X و Z مستقل هستند اگر تمام مسیرهای بین آنها غیرفعال باشد (با دانستن شواهد).
- **توجه.** برای بررسی استقلال متغیرها تنها لازم است ساختار گراف تحلیل شود و به جداول توزیع شرطی نیازی نیست.

دسترس پذیری (جدایی-D)

۲۴



سه تایی های فعال

□ س. آیا با داشتن شواهد $\{Z\}$ ، متغیرهای X و Y مستقل شرطی هستند؟

□ بله، اگر X و Y به وسیله Z جدا شده باشند.

□ به دنبال مسیرهای فعال میان X و Y بگرد.

□ عدم وجود مسیر فعال = استقلال!

□ مسیر فعال. همه سه تایی های موجود در مسیر فعال هستند.

□ زنجیره علی $A \rightarrow B \rightarrow C$ اگر B مشاهده نشده باشد.

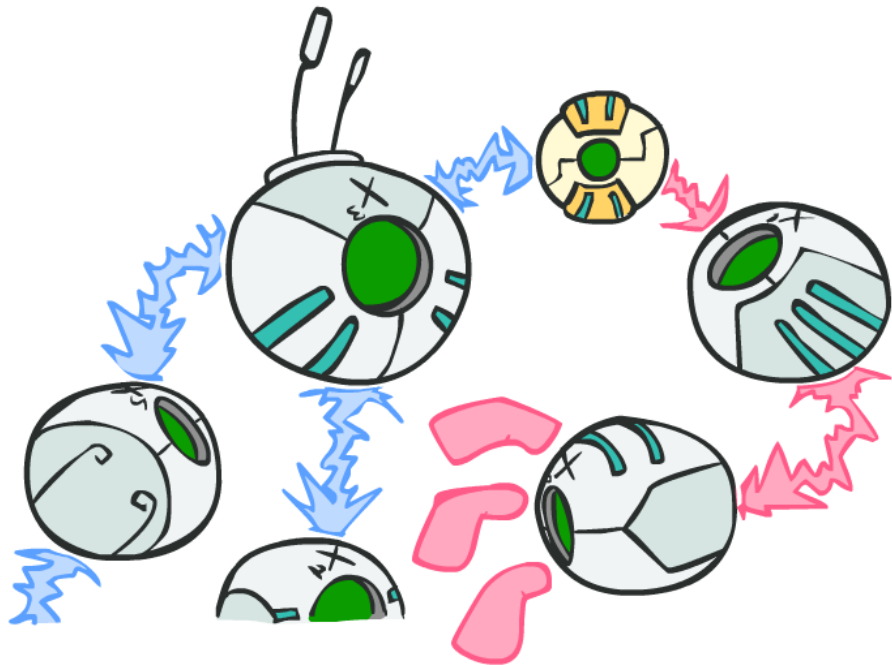
□ علت مشترک $A \leftarrow B \rightarrow C$ اگر B مشاهده نشده باشد.

□ تأثیر مشترک $A \rightarrow B \leftarrow C$ اگر B یا یکی از نسلهایش مشاهده شده باشد.

□ توجه. وجود تنها یک بخش غیرفعال در مسیر، مسیر را غیرفعال می سازد.

□ پرس و جو.

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$$

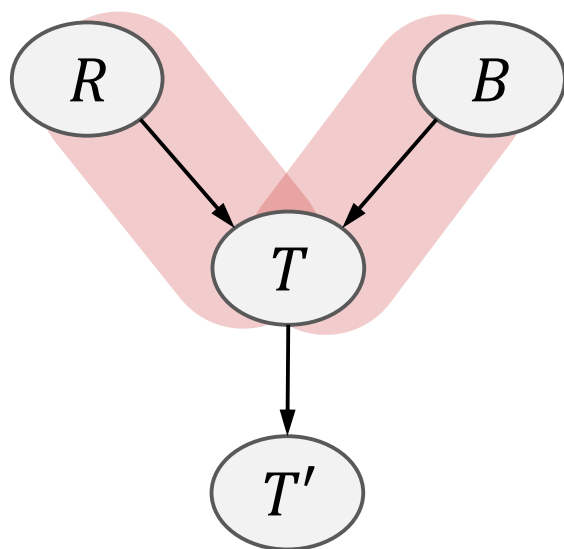


□ گره‌های مشاهده شده را علامت بزن.

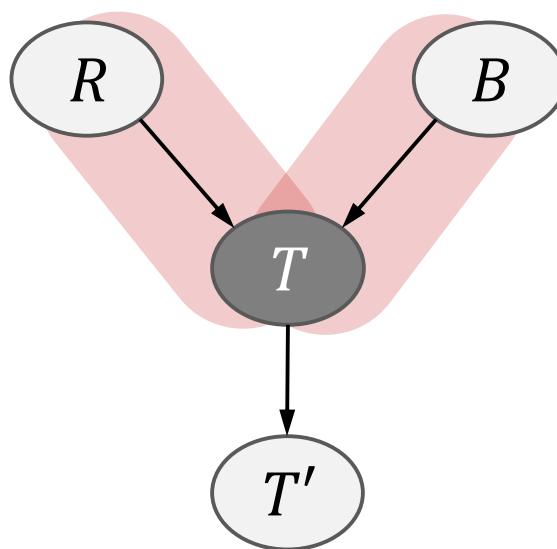
□ تمام مسیرهای موجود میان X_i و X_j ، بررسی کن.
[بدون در نظر گرفتن جهت مسیر]

□ اگر حداقل یک مسیر فعال پیدا شد، آنگاه $X_i \not\perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$.

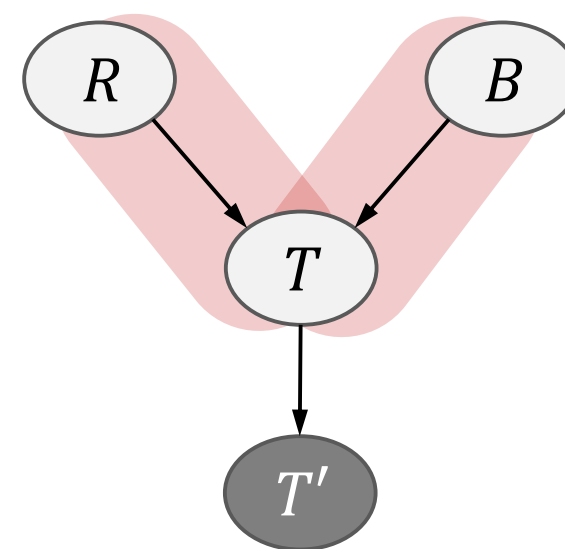
□ اگر هیچ مسیر فعالی پیدا نشد، آنگاه $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$.



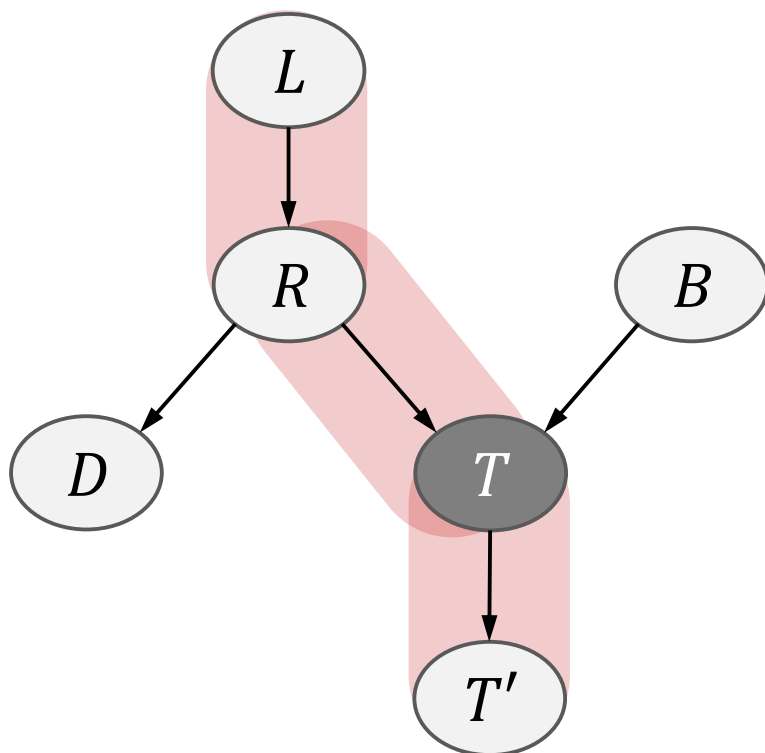
$$R \perp B$$



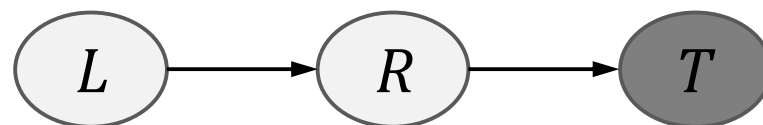
$$R \perp B \mid T$$



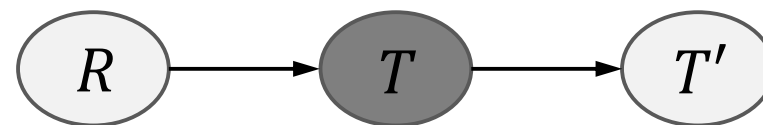
$$R \perp B \mid T'$$



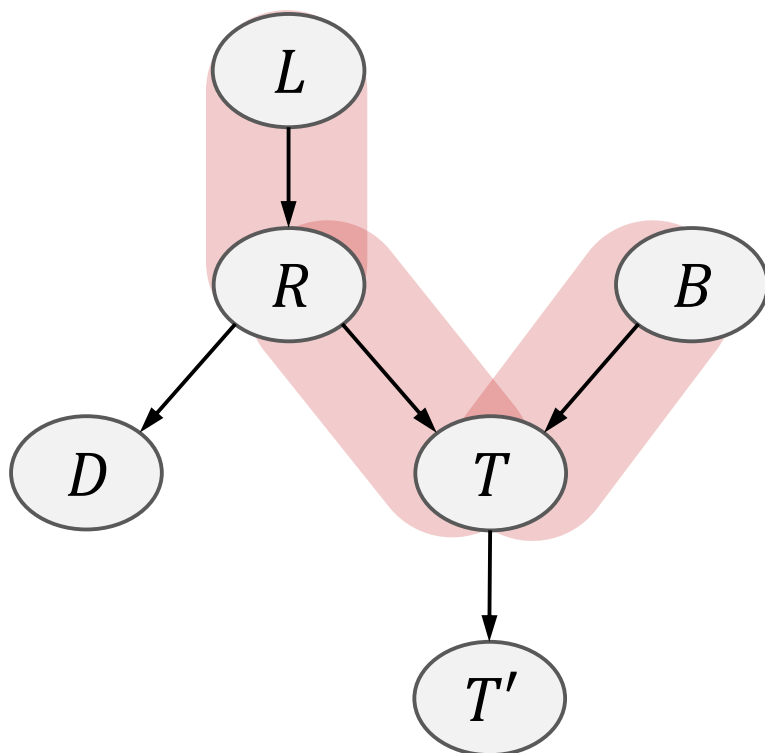
$$L \perp T' | T$$



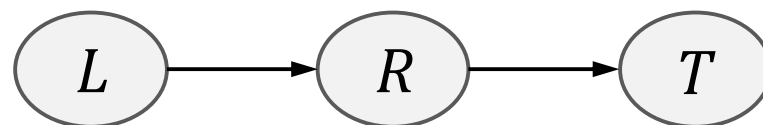
فعال



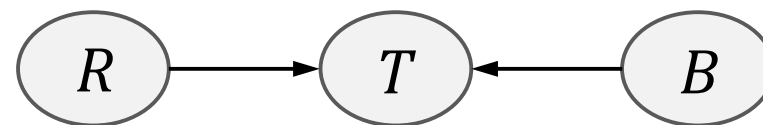
غیر فعال



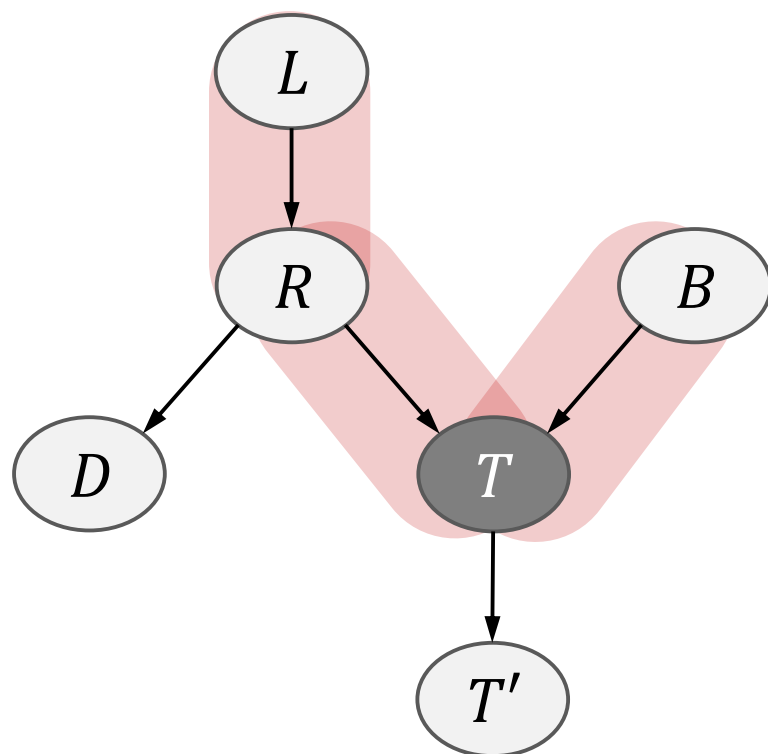
$$L \perp B$$



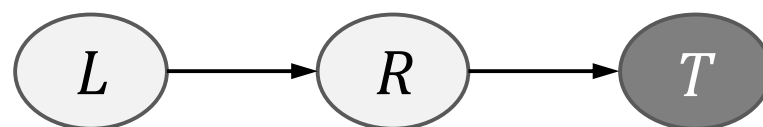
فعال



غیرفعال



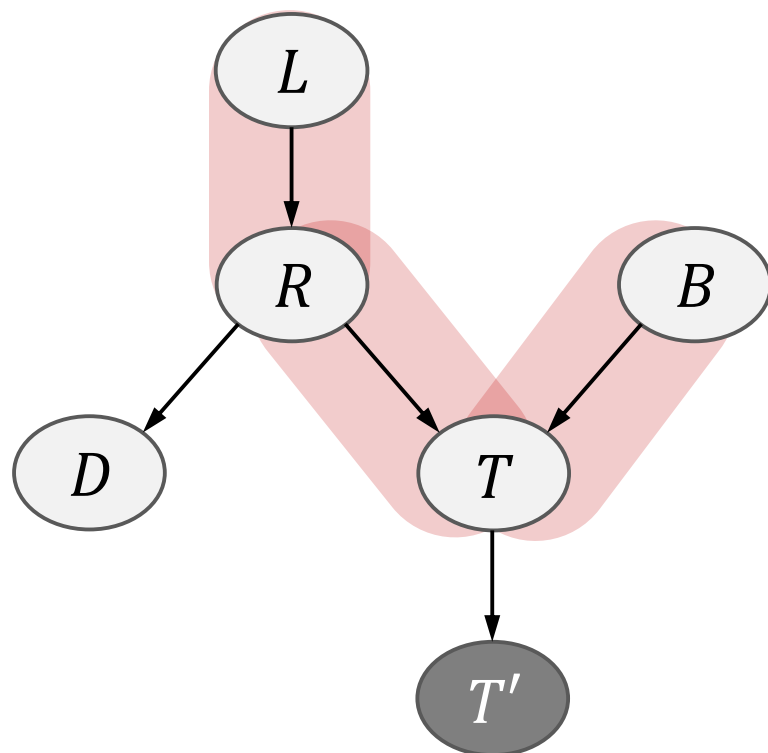
$$L \perp B | T$$



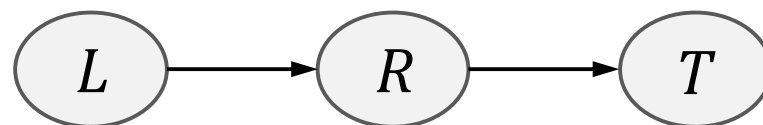
فعال



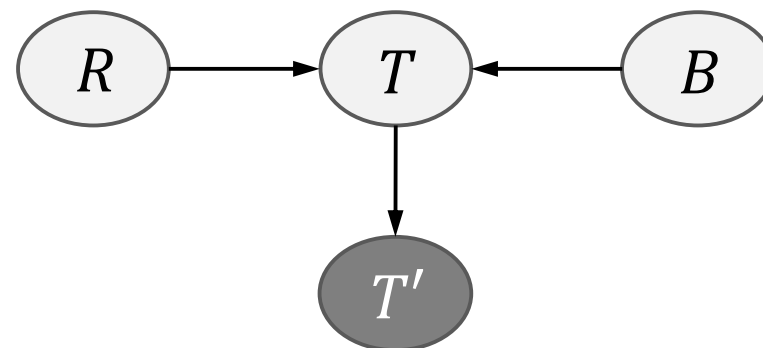
فعال



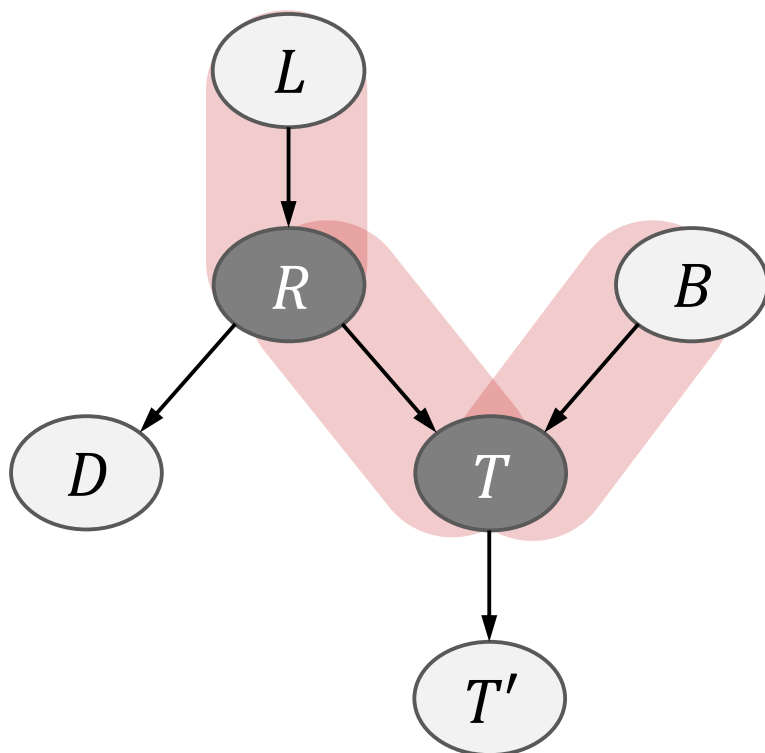
$$L \perp B | T'$$



فعال



فعال



$$L \perp B | T, R$$

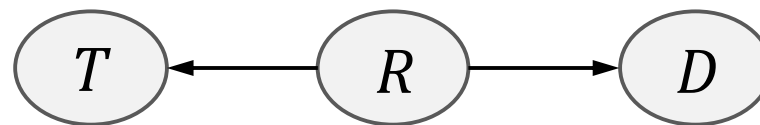
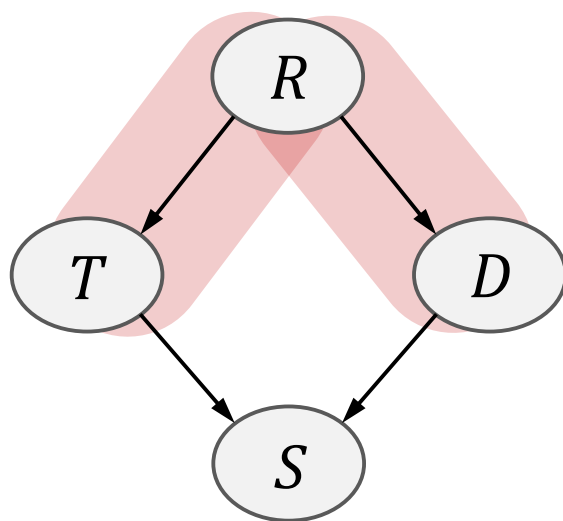


غیر فعال



فعال

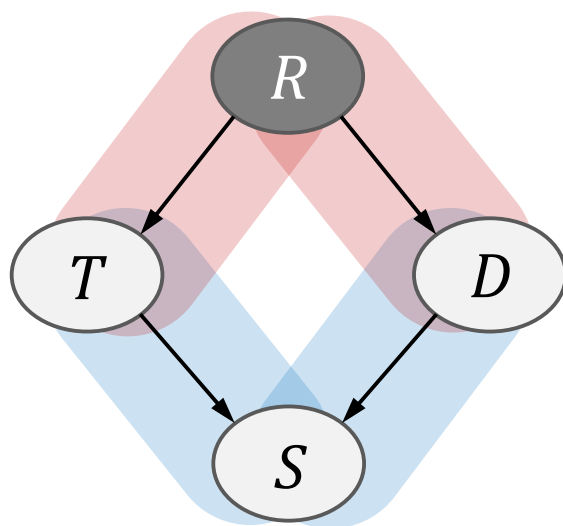
$$T \perp D$$



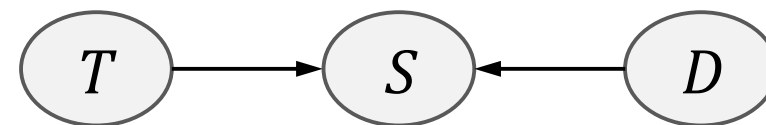
فعال

□ خیر. زیرا یک مسیر فعال بین T و D وجود دارد.

$$T \perp D \mid R$$



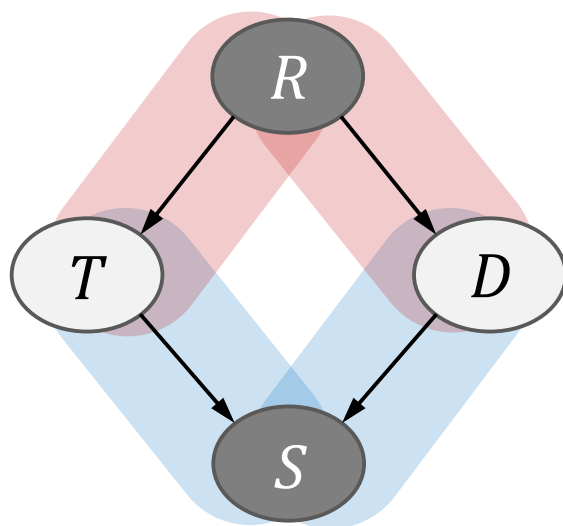
غیر فعال



غیر فعال

□ بله. زیرا همه مسیرهای بین T و D غیر فعال هستند.

$$T \perp D \mid R, S$$



غیر فعال



فعال

□ خیر. زیرا یک مسیر فعال بین T و D وجود دارد. [مسیر $T \rightarrow S \leftarrow D$]

تعیین استقلال‌های شرطی

۳۵

□ با داشتن یک شبکه بیز، می‌توان یک لیست کامل از تمامی استقلال‌های شرطی به صورت زیر ایجاد نمود:

$$X_i \perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$$

□ این لیست بیانگر مجموعه تمام توزیع‌های احتمالاتی است که به وسیله شبکه بیز قابل بازنمایی هستند.

