مدل‌های مخفی مارکوف ۱

سید ناصر رضوی n.razavi@tabrizu.ac.ir

۱۳۹۵

استدلال در طول زمان یا مکان

- انگیزه. در بسیاری از موارد نیاز داریم درباره‌ی دنباله‌ای از مشاهدات استدلال کنیم.
  - شناسایی گفتار
  - مکان‌یابی روبات
  - مراقبت‌های پزشکی
  - توجه کاربر

- راه‌حل. افزودن مفهوم زمان (یا مکان) به مدل‌های خود!

مدل‌های مارکوف

- **حالت.** مقدار متغیر X در یک زمان مشخص حالت نام دارد.

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \dashrightarrow$$

$$P(X_1) \qquad\qquad P(X_t|X_{t-1})$$

- **پارامترها.** [احتمال تغییر حالت، دینامیک]
  - تعیین کننده‌ی چگونگی تغییر حالت مدل در طول زمان!
  - فرض ایستایی: احتمال تغییر حالت‌ها با گذشت زمان ثابت است.
  - همانند مدل تغییر حالت در MDP، اما در اینجا انتخاب عمل وجود ندارد.

توزیع توأم مدل‌های مارکوف

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$$

$P(X_1)$ $P(X_t|X_{t-1})$

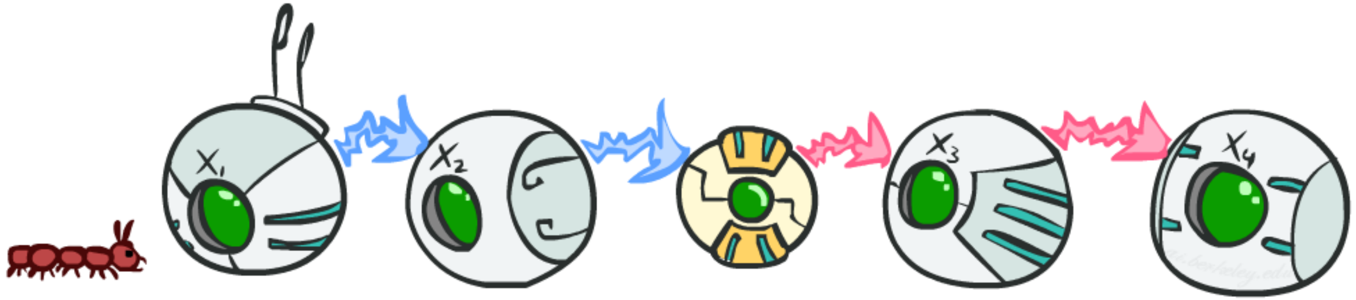
- توزیع توأم.

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)$$

- در حالت کلی.

$$P(X_1, X_2, \dots, X_T) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)\cdots P(X_T|X_{T-1})$$
$$= P(X_1)\prod_{t=2}^{T} P(X_t|X_{t-1})$$

استقلال شرطی



- استقلال شرطی پایه‌ای.
  - با دانستن حال، گذشته و آینده مستقل هستند.
  - هر حالت تنها به حالت قبل از خود وابسته است.
    - ویژگی مارکوف مرتبه اول!
- توجه داشته باشید که این زنجیره (نامتناهی) چیزی به جز یک شبکه‌ی بیز نیست.
  - بنابراین اگر برای این زنجیره یک طول ثابت در نظر بگیریم، همواره می‌توانیم از روش‌های استنتاج عمومی مربوط به شبکه‌های بیز استفاده کنیم. [مانند الگوریتم حذف متغیر]

مثال از زنجیره مارکوف: آب و هوا

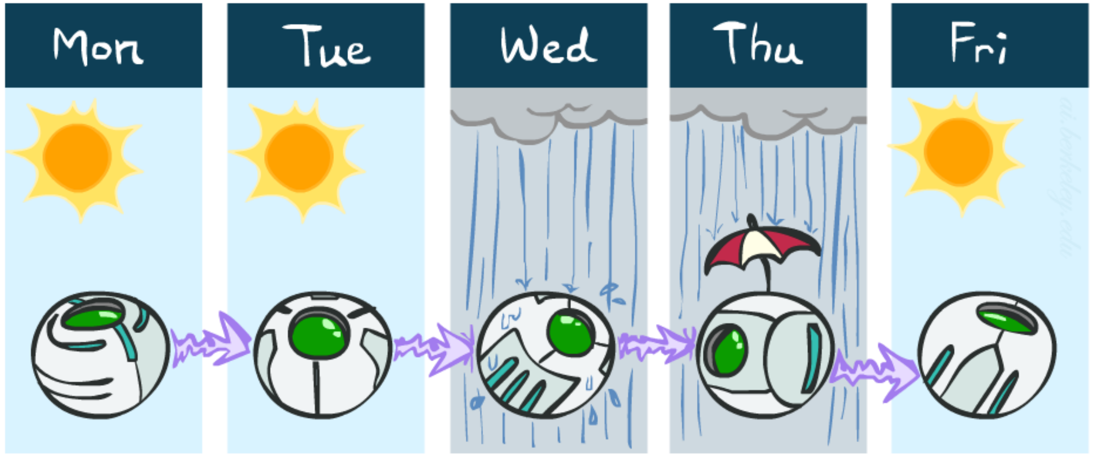
- حالت‌ها.

$$X = \{rain, sun\}$$

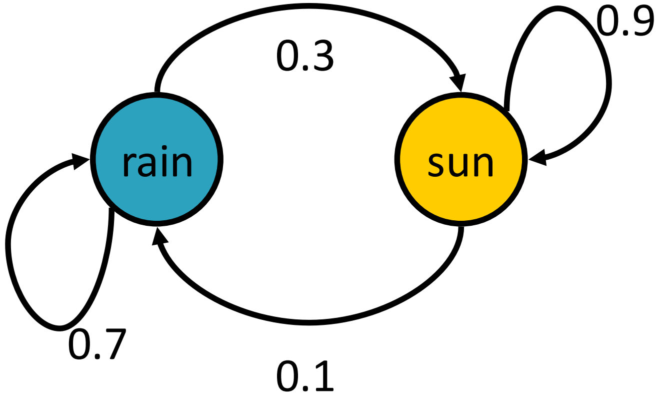
- توزیع اولیه.

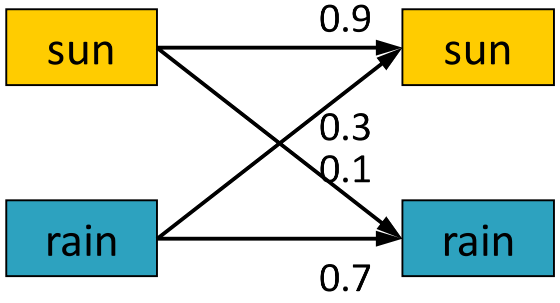
$$P(X) = \langle sun: 1.0, rain: 0.0 \rangle$$

- جداول توزیع احتمال شرطی.



دو روش جدید برای نمایش جدول توزیع احتمال شرطی

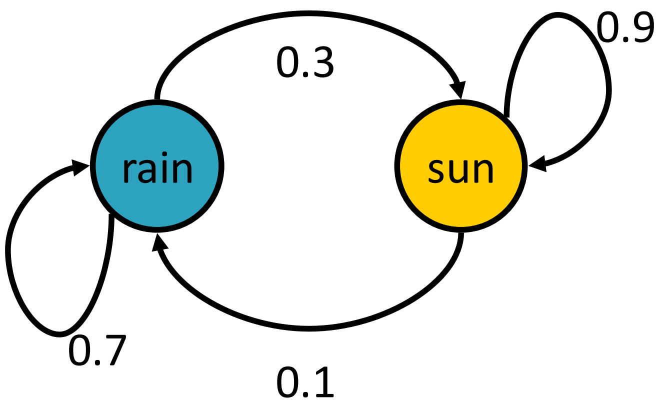




X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

مثال از زنجیره مارکوف: آب و هوا

- توزیع اولیه.



$$P(X_1) = \langle sun: 1.0, rain: 0.0 \rangle$$

- محاسبه‌ی توزیع احتمالات پس از یک مرحله.

$$P(X_2 = sun) = P(X_2 = sun \mid X_1 = sun) P(X_1 = sun) + P(X_2 = sun \mid X_1 = rain) P(X_1 = rain)$$

$$0.9 \times 1.0 + 0.3 \times 0.0 = 0.9$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

الگوریتم Mini-Forward

- پرسش. وضعیت آب و هوا پس از t روز چگونه است؟
  - یک حالت خاص از الگوریتم حذف متغیر! [ترتیب حذف متغیرها: ... ,X_1,X_2]

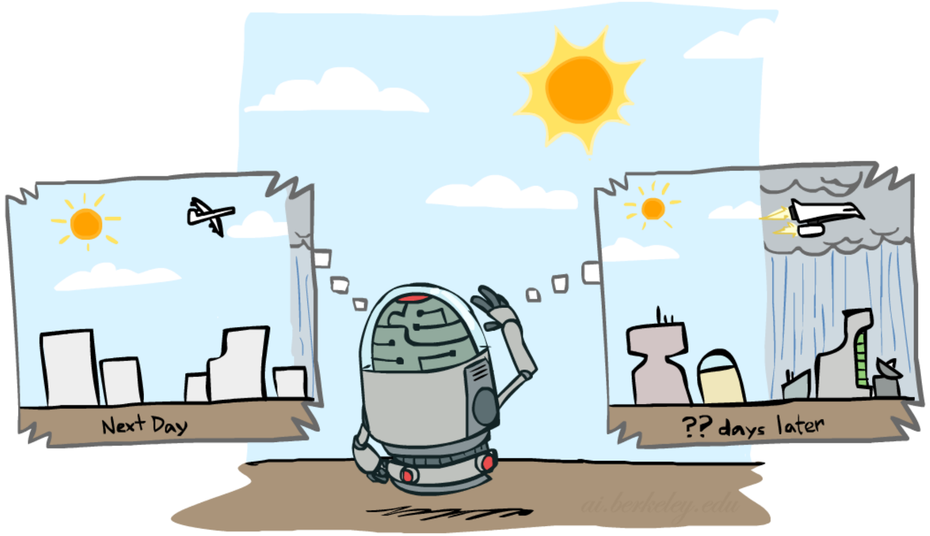
$$P(X_t) = ?$$

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \dashrightarrow$$

$$P(x_1) = \text{known}$$

$$P(x_t) = \sum_{x_{t-1}} P(x_t, x_{t-1})$$
$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1})P(x_{t-1})$$

شبیه‌سازی رو به جلو



مثال از اجرای الگوریتم Mini-Forward

- با توجه به مشاهده‌ی خورشید در روز اول:

$$\underset{P(X_1)}{\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}} \quad \underset{P(X_2)}{\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}} \quad \underset{P(X_3)}{\begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.16 \end{pmatrix}} \quad \underset{P(X_4)}{\begin{pmatrix} 0.804 \\ 0.196 \end{pmatrix}} \quad \longrightarrow \quad \underset{P(X_\infty)}{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}}$$

- اگر روز اول هوا بارانی باشد:

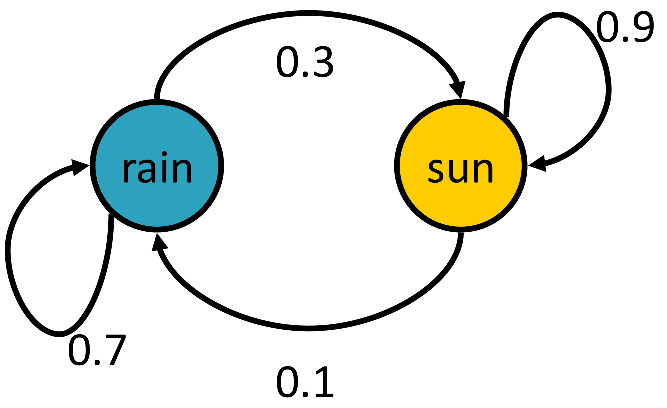
$$\underset{P(X_1)}{\begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}} \quad \underset{P(X_2)}{\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}} \quad \underset{P(X_3)}{\begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.52 \end{pmatrix}} \quad \underset{P(X_4)}{\begin{pmatrix} 0.588 \\ 0.412 \end{pmatrix}} \quad \longrightarrow \quad \underset{P(X_\infty)}{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}}$$

- اگر توزیع اولیه به صورت زیر باشد:

$$\underset{P(X_1)}{\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}} \quad \dots \quad \longrightarrow \quad \underset{P(X_\infty)}{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}}$$

زنجیره مارکوف: نمایش ماتریسی

- تغییر حالت.



$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$P(X_t|X_{t-1}) \qquad P(X_{t-1}) \qquad P(X_t)$$

$$P(X_2 = sun) = P(X_2 = sun\ |X_1 = sun)P(X_1 = sun) +$$

$$P(X_2 = sun|X_1 = rain)P(X_1 = rain)$$

$$0.9 \times 1.0 + 0.3 \times 0.0 = 0.9$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t\|X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

$$P(X_1) = \langle sun: 1.0, rain: 0.0 \rangle$$

توزیع‌های ایستا

- در اغلب زنجیره‌ها:
  - تأثیر توزیع اولیه با گذشت زمان کمتر و کمتر می‌شود.
  - به گونه‌ای که توزیع نهایی مستقل از توزیع اولیه است.

- توزیع ایستا.
  - یک توزیع که سرانجام زنجیره به آن همگرا می‌شود.
  - توزیع ایستا رابطه‌ی زیر را برآورده می‌سازد:

$$P_{\infty}(X) = P_{\infty+1}(X) = \sum_{x} P_{t\,|\,t-1}(X|x)P_{\infty}(x)$$

توزیع‌های ایستا

- محاسبه‌ی توزیع ایستا.

$$P_\infty(X) = P_{\infty+1}(X) = \sum_x P_{t\,|\,t-1}(X|x)P_\infty(x)$$

$$P_\infty(sun) = P_{t|t-1}(sun|sun)P_\infty(sun) + P_{t|t-1}(sun|rain)P_\infty(rain)$$

$$P_\infty(rain) = P_{t|t-1}(rain|sun)P_\infty(sun) + P_{t|t-1}(rain|rain)P_\infty(rain)$$

$$P_\infty(sun) = 0.9P_\infty(sun) + 0.3P_\infty(rain)$$

$$P_\infty(rain) = 0.1P_\infty(sun) + 0.6P_\infty(rain)$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$$

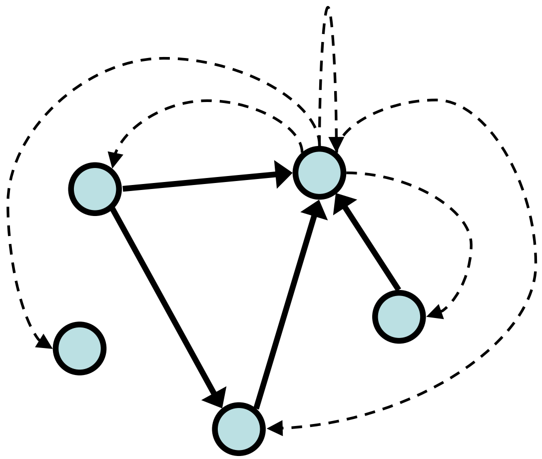
بیان ماتریسی

$$P_\infty(sun) = 3P_\infty(rain)$$

$$P_\infty(sun) + P_\infty(rain) = 1.0$$

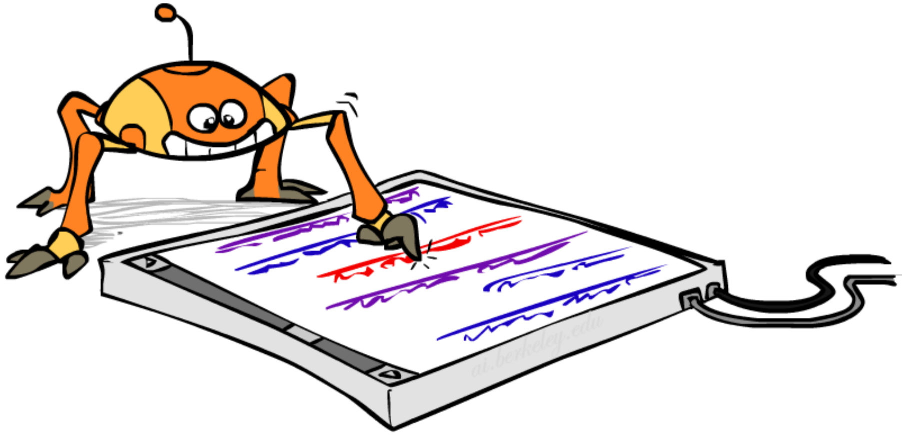
$$\Rightarrow \left\langle \begin{matrix} P_\infty(sun) = 0.75 \\ P_\infty(rain) = 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

کاربرد توزیع ایستا در تحلیل پیوند در وب



- رتبه‌بندی صفحات بر روی گراف وب.
  - هر صفحه‌ی وب یک حالت است.
  - توزیع اولیه: توزیع یکنواخت بر روی صفحات
  - تغییر حالت‌ها:
    - با احتمال c به صورت یکنواخت به یک صفحه‌ی تصادفی برو. [یالهای نقطه‌چین]
    - با احتمال $1 - c$ به صورت تصادفی یک پیوند خروجی را دنبال کن. [یالهای ضخیم]

- توزیع ایستا.
  - صرف زمان بیشتر بر روی صفحات بسیار قابل دسترس.
  - مثلا راه‌های بسیاری برای رفتن به صفحه‌ی دانلود آکروبات ریدر.
  - نسخه‌ی ۱ گوگل مجموعه صفحاتی را که شامل کلمات کلیدی شما بود بر حسب رتبه‌ی آنها به صورت نزولی برمی‌گرداند. اکنون همه‌ی موتورهای جستجو از تحلیل پیوند به همراه بسیاری از عوامل دیگر استفاده می‌کنند.



کاربرد توزیع ایستا در نمونه‌برداری گیبس

- حالت‌ها. هر مقداردهی ممکن بر روی متغیرهای مخفی و متغیر پرس و جو.

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = H \cup Q$$

- تغییر حالت‌ها.
  - نمونه‌برداری مجدد از متغیر X_j با احتمال $1/n$ بر طبق توزیع شرطی زیر:

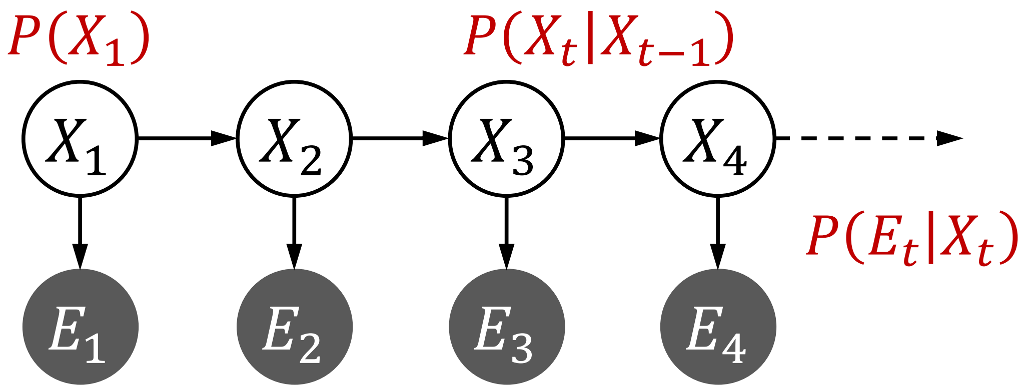
$$P\left(X_j \middle| X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n, e_1, \dots, e_m\right)$$

- توزیع ایستا.
  - برابر با توزیع شرطی $P(X_1, \dots, X_n | e_1, \dots, e_m)$
  - در نتیجه، اگر الگوریتم نمونه‌برداری گیبس را به تعداد کافی اجرا کنیم، یک نمونه از توزیع خواسته شده به دست می‌آوریم.

مدل‌های مخفی مارکوف

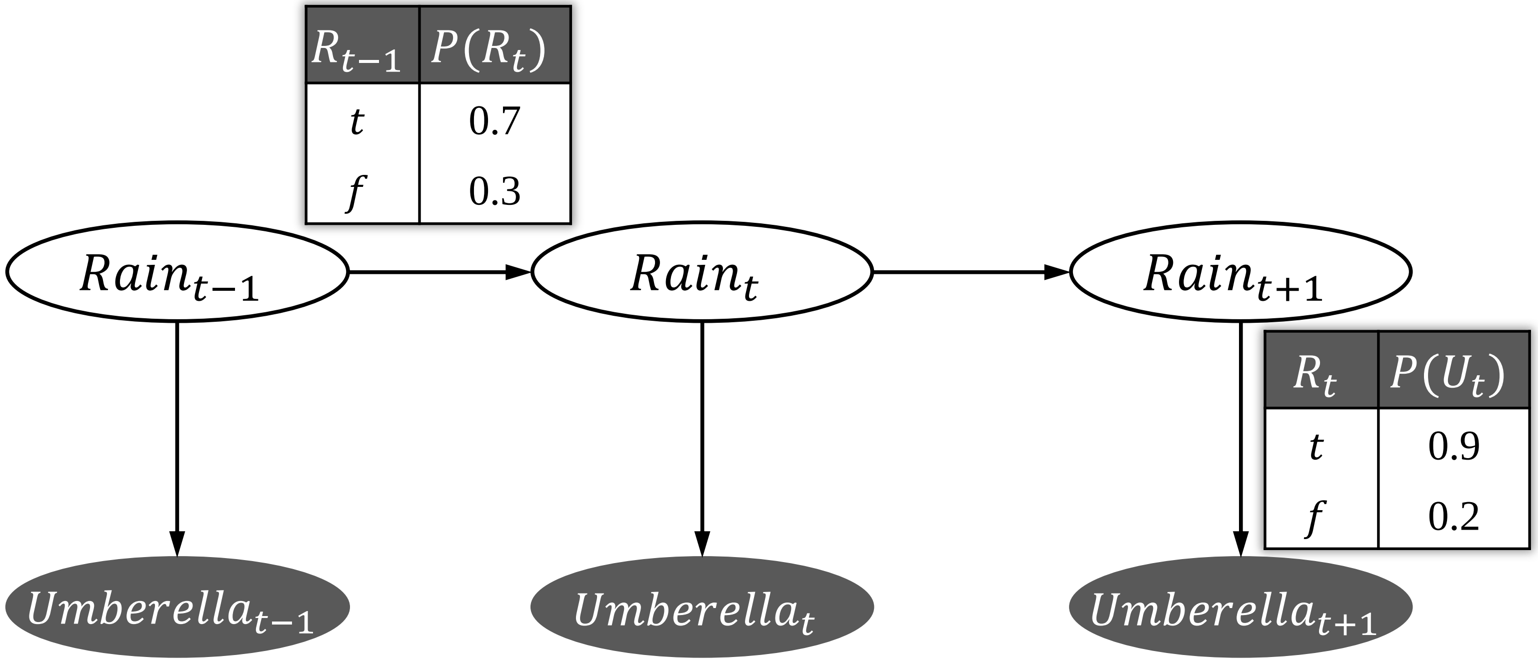
مدل‌های مخفی مارکوف

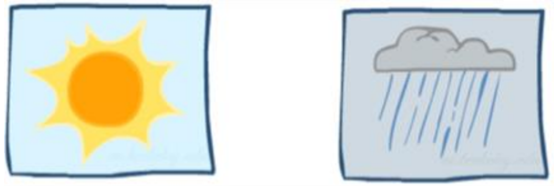
- برای اغلب عامل‌ها زنجیره‌های مارکوف چندان مفید نیستند.
  - عامل برای این که بتواند باورهایش را به روز رسانی کند، نیاز به انجام مشاهدات دارد.
- مدل‌های مخفی مارکوف.
  - مشاهده‌ی خروجی‌ها (تأثیرات) در هر مرحله‌ی زمانی.
  - مدل‌های مخفی مارکوف به عنوان شبکه‌ی بیز:



مدل‌های مخفی مارکوف

- مثال از مدل مخفی مارکوف.





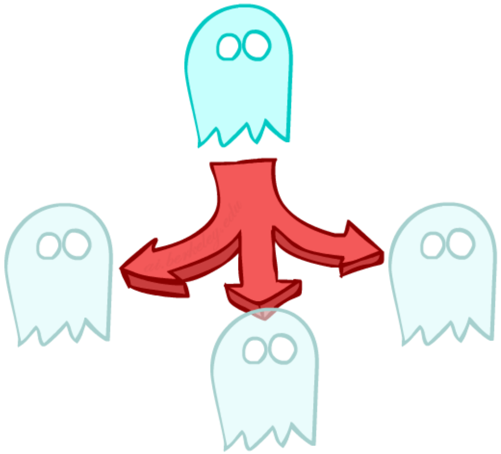
- تعریف یک مدل مخفی مارکوف.
  - توزیع اولیه: $P(X_1)$
  - تغییر حالت‌ها: $P(X_t|X_{t-1})$
  - مشاهدات: $P(E_t|X_t)$

عامل روح یاب

- توزیع اولیه. $P(X_1)$ = یکنواخت
- تغییر حالت‌ها. $P(X|X')$ = معمولاً در جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند، اما گاهی اوقات در یک جهت تصادفی حرکت می‌کند و یا در مکان فعلی خود باقی می‌ماند.
- مشاهدات. $P(R_{ij}|X)$
  - قرمز به معنای نزدیک و سبز به معنای دور است.

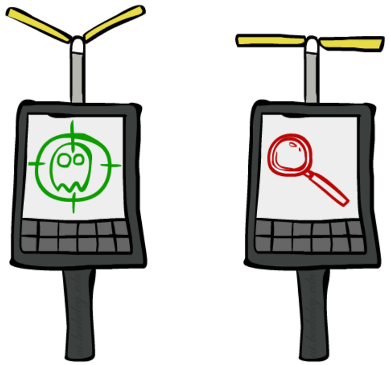
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

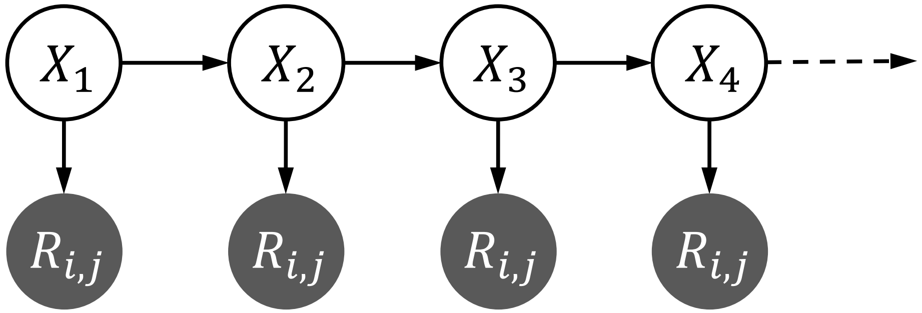
$P(X_1)$



1/6	1/6	1/2
0	1/6	0
0	0	0

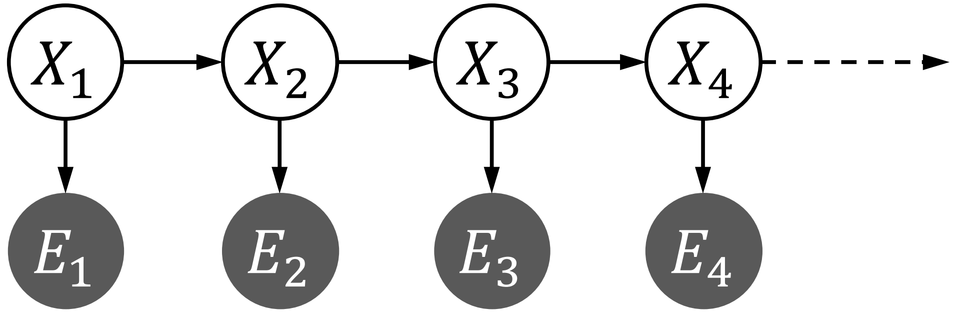
P(X|X'=<1,2>)





استقلال شرطی

- در مدل‌های مخفی مارکوف دو ویژگی استقلال مهم وجود دارد:
  - آینده از طریق حال به گذشته وابسته است.
  - با دانستن حالت فعلی، مشاهده‌ی فعلی از تمام متغیرهای دیگر مستقل است.



- پرسش. آیا گزاره‌های فوق به این معنا هستند که شواهد ضرورتاً مستقل هستند؟

کاربردها در دنیای واقعی

- شناسایی گفتار.
  - مشاهدات همان سیگنال‌های صوتی ورودی هستند. [با مقادیر پیوسته]
  - حالت‌ها: هر مکان خاص در یک کلمه‌ی خاص. [ده‌ها هزار حالت]
- ترجمه‌ی ماشینی.
  - مشاهدات همان کلمات ورودی هستند. [ده‌ها هزار مشاهده]
  - حالت‌ها گزینه‌های ممکن برای ترجمه هستند.
- ردیابی روبات.
  - مشاهدات اطلاعات دریافتی از فاصله‌یاب‌ها هستند. [با مقادیر پیوسته]
  - حالت‌ها موقعیت‌های ممکن بر روی نقشه هستند. [با مقادیر پیوسته]

انواع استنتاج

- فیلتر کردن. $P(X_t | e_{1:t})$
  - حالت باور -- ورودی فرآیند تصمیم‌گیری در عامل منطقی.
- پیش‌بینی. $P(X_{t+k} | e_{1:t})$ به ازای $k > 0$
  - ارزیابی دنباله عملیات ممکن؛ همانند فیلتر کردن ولی بدون دریافت شواهد.
- هموارسازی. $P(X_k | e_{1:t})$ به ازای $0 \le k < t$
  - تخمین بهتر حالت‌های گذشته.
- محتمل‌ترین توضیح. $\arg\max_{x_{1:t}} P(x_{1:t} \mid e_{1:t})$
  - شناسایی گفتار، کدگذاری در یک کانال دارای نویز.

فیلتر کردن / پایش

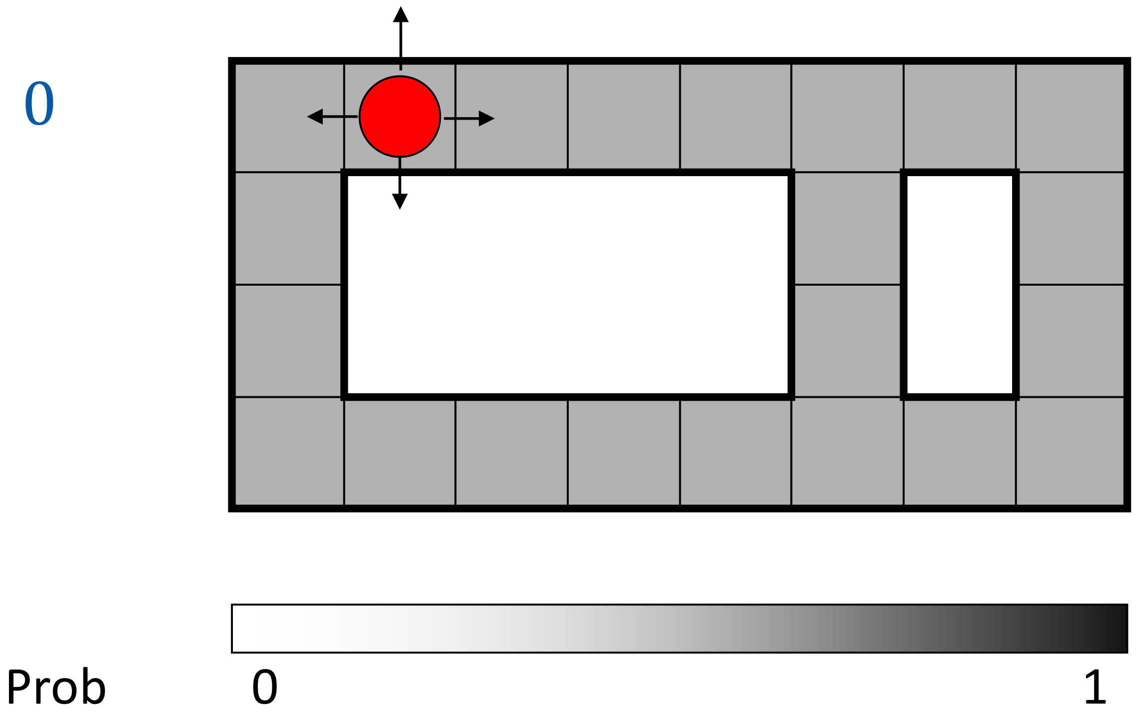
- فیلتر کردن [پایش]. فرآیند ردیابی توزیع زیر در طول زمان.

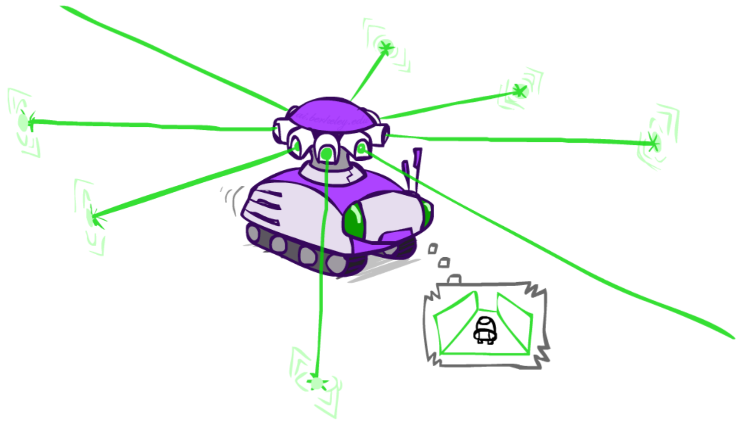
$$B_t(X) = P_t(X_t|e_1, e_2, \ldots, e_t)$$

- $B_1(X)$ = باور اولیه نسبت به توزیع X، معمولاً یکنواخت.
- با گذشت زمان و دریافت مشاهدات جدید، باور $B(X)$ را به روز رسانی می‌کنیم.
- فیلتر کالمن. [متغیرهای پیوسته، دینامیک خطی، نویز گاوسی] در دهه‌ی ۶۰ ابداع شد و اولین بار به عنوان روشی به منظور تخمین مسیر حرکت برای سفینه‌ی آپولو پیاده‌سازی شد.
  - حالت‌ها. مکان‌های ممکن برای سفینه
  - مشاهدات. تصاویر دریافتی از سفینه

مثال: موقعیت‌یابی روبات

$t = 0$

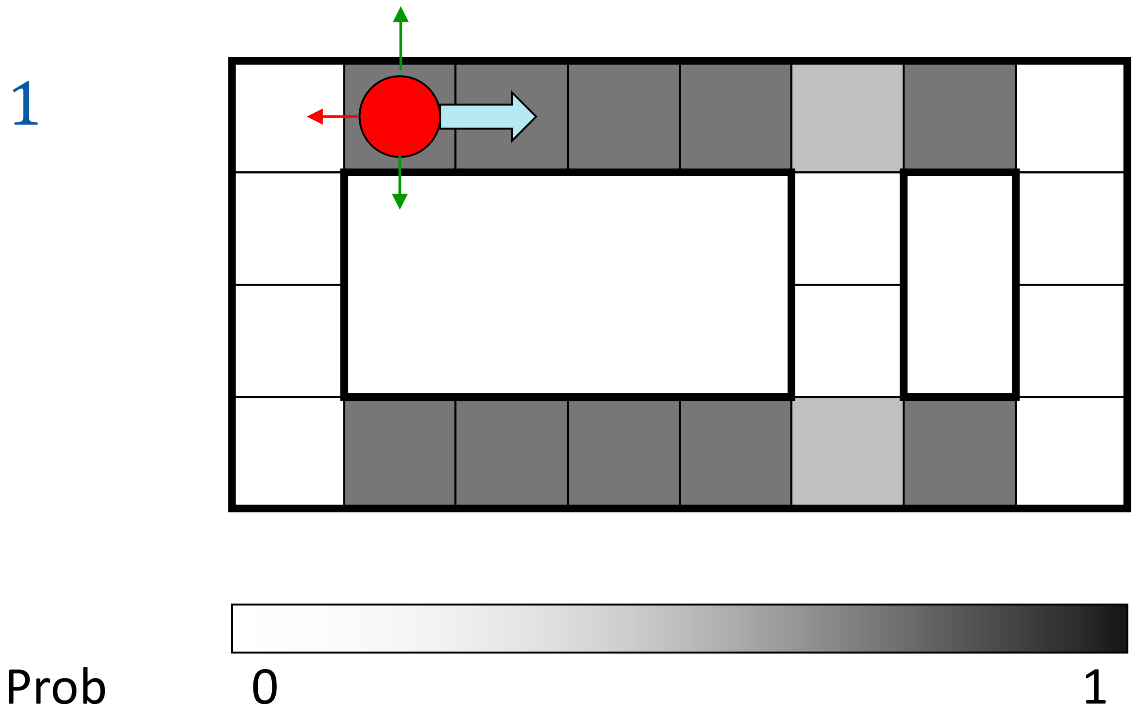


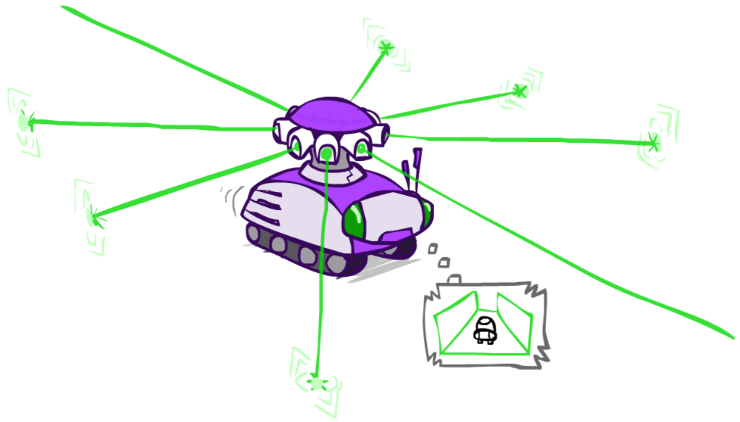


- مدل حسگر. در کدام جهت‌ها دیوار وجود دارد. [حداکثر ۱ خطا]
- مدل حرکت. هر عمل ممکن است با احتمال کمی با شکست مواجه شود.

مثال: موقعیت‌یابی روبات

$t = 1$

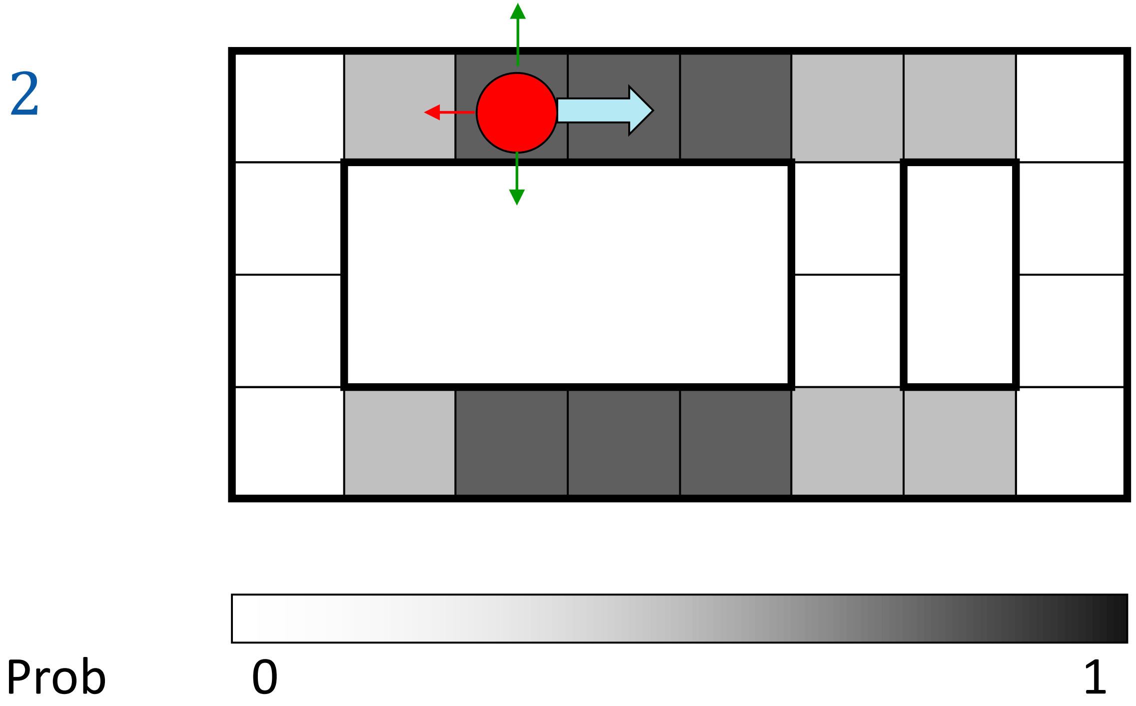


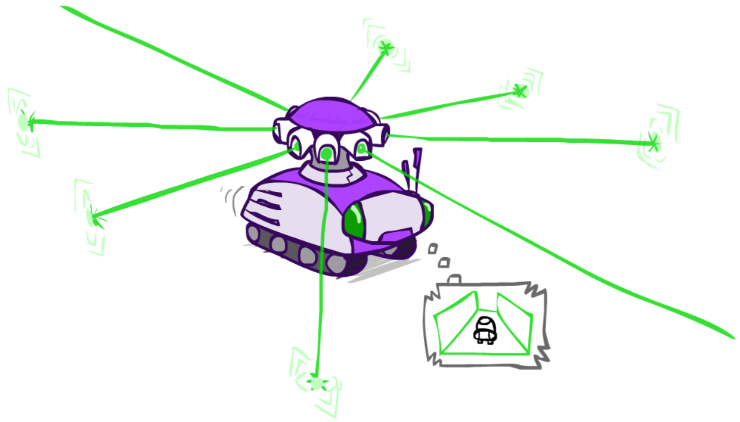


- خاکستری روشن‌تر. به این دلیل که حداکثر امکان ۱ اشتباه وجود دارد، خانه‌های با رنگ خاکستری روشن نیز احتمال دارند، اما احتمال آنها کمتر است.

مثال: موقعیت‌یابی روبات

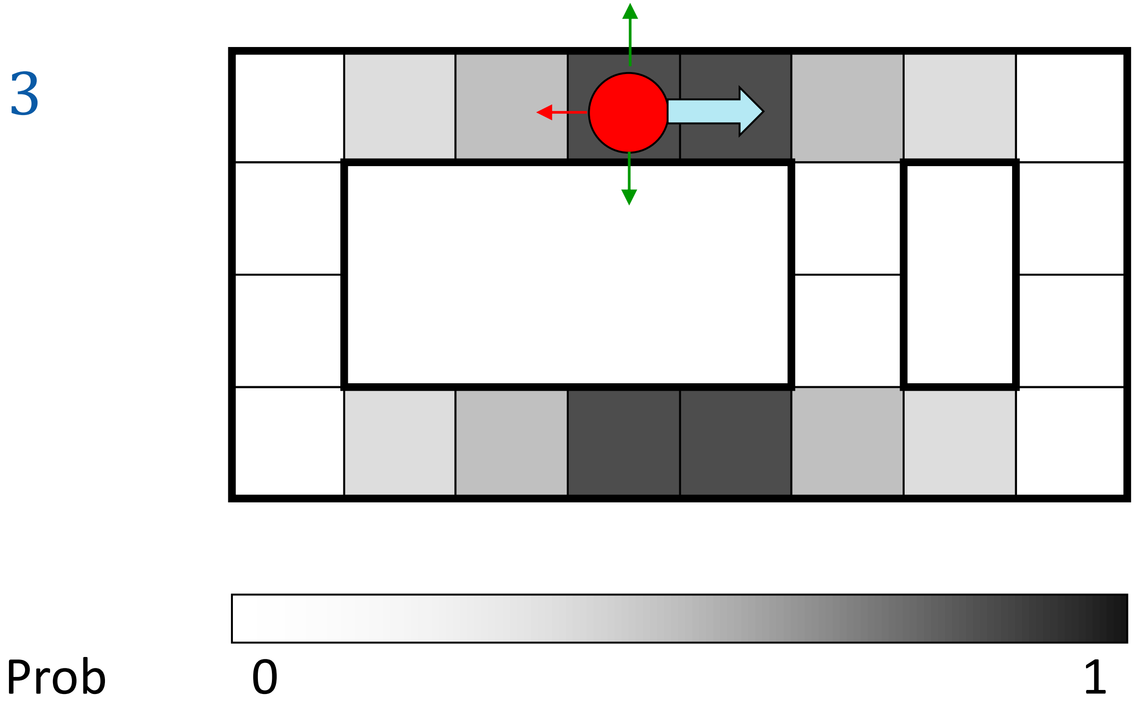
$t = 2$

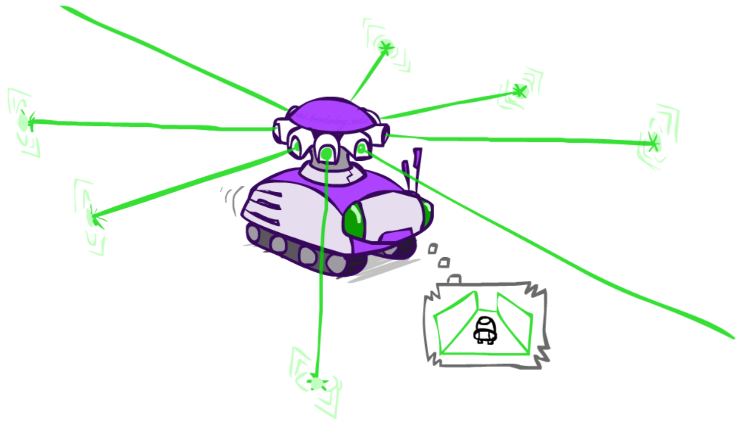




مثال: موقعیت‌یابی روبات

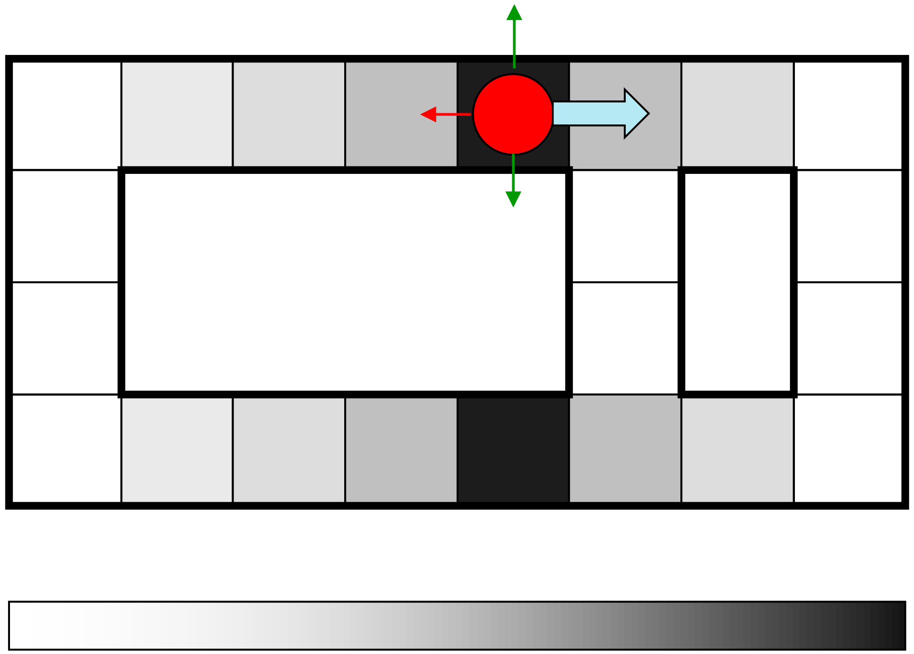
$t = 3$



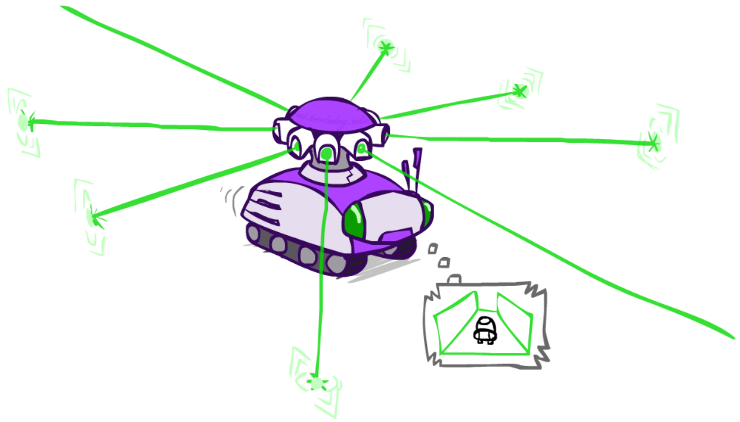


مثال: موقعیت‌یابی روبات

$t\ = 4$

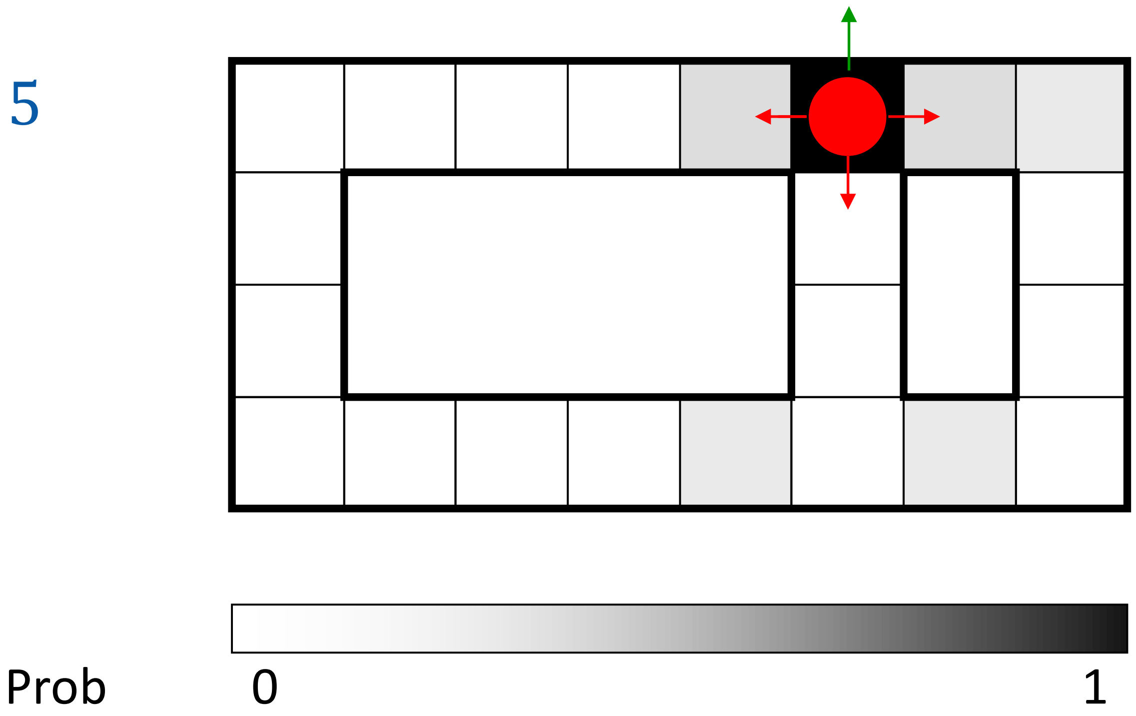


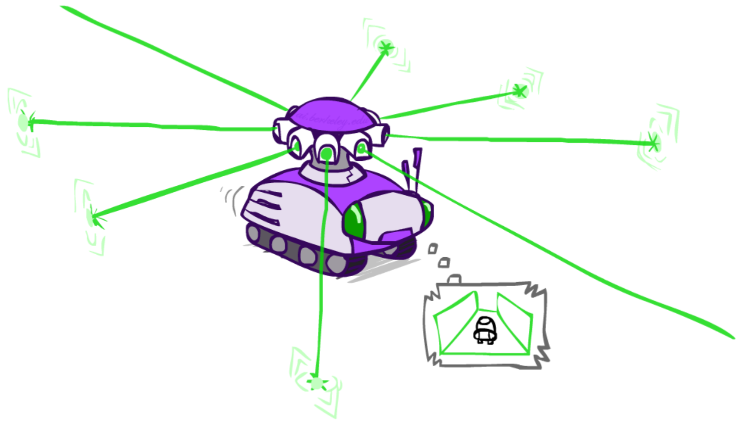
Prob 0 1



مثال: موقعیت‌یابی روبات

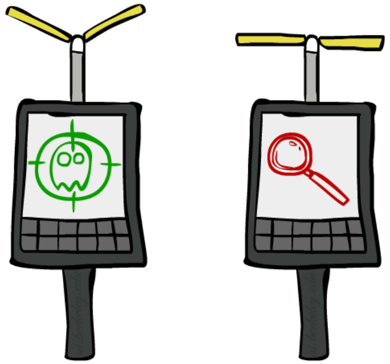
$t = 5$





استنتاج: حالت‌های پایه

- مشاهده.
  - ورودی: $P(X_1)$ و $P(e_1|X_1)$
  - پرس و جو: $P(x_1|e_1)\ \forall x_1$

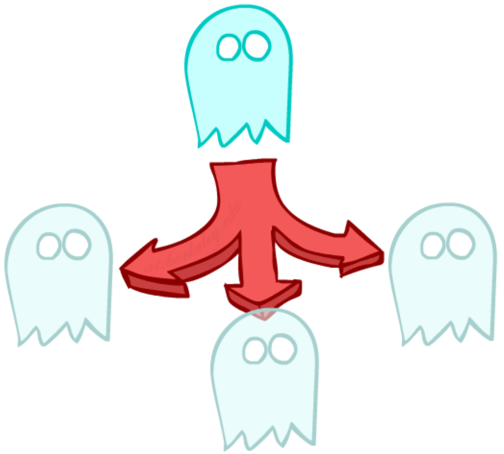


$$X_1 \rightarrow E_1$$

$P(X_1|e_1)$

$$P(x_1|e_1) = P(x_1,e_1)/P(e_1)$$
$$\propto_{X_1} P(x_1,e_1)$$
$$= P(x_1)P(e_1|x_1)$$

- گذر زمان.
  - ورودی: $P(X_1)$ و $P(X_2|X_1)$
  - پرس و جو: $P(x_2)\ \forall x_2$

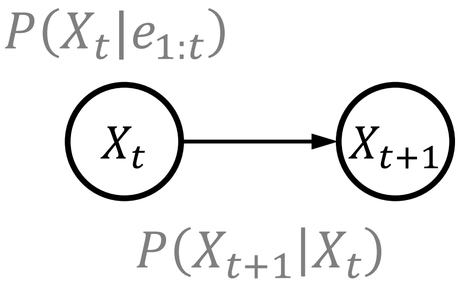


$$X_1 \rightarrow X_2$$

$P(X_2)$

$$P(x_2) = \textstyle\sum_{x_1} P(x_1,x_2)$$
$$= \textstyle\sum_{x_1} P(x_1)P(x_2|x_1)$$

گذر زمان



- فرض کنید باور فعلی $P(X_t|e_{1:t})$ را در اختیار داریم.

$B(X_t)$

- در این صورت، پس از گذشتن یک مرحله‌ی زمانی:

$$P(X_{t+1}|e_{1:t}) = \sum_{x_t} \underbrace{P(X_{t+1}|x_t)P(x_t|e_{1:t})}_{P(X_{t+1},x_t|e_{1:t})}$$

- یا به صورت فشرده‌تر:

$$B'(X_{t+1}) = \sum_{x_t} P(X'|x)B(x_t)$$

گذر زمان: مثال

- با گذشت زمان، عدم قطعیت «انباشت» می‌گردد.

مدل حرکت: در جهت عقربه‌های ساعت

<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01
<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01
<0.01	<0.01	1.00	<0.01	<0.01	<0.01
<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01

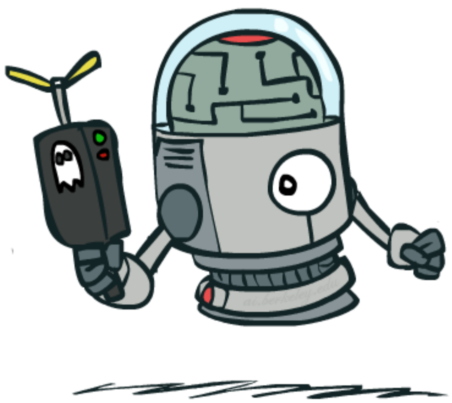
T = 1

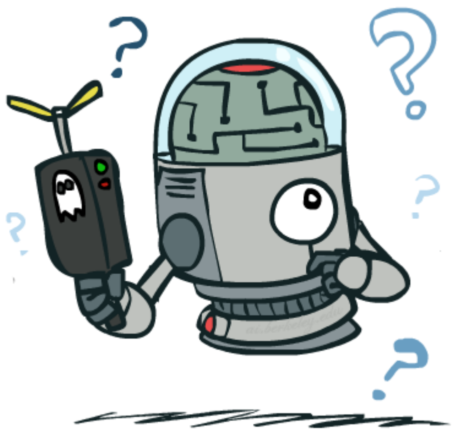
<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01
<0.01	<0.01	0.06	<0.01	<0.01	<0.01
<0.01	0.76	0.06	0.06	<0.01	<0.01
<0.01	<0.01	0.06	<0.01	<0.01	<0.01

T = 2

0.05	0.01	0.05	<0.01	<0.01	<0.01
0.02	0.14	0.11	0.35	<0.01	<0.01
0.07	0.03	0.05	<0.01	0.03	<0.01
0.03	0.03	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01

T = 5





مشاهده

- فرض کنید باور فعلی $P(X_{t+1}|e_{1:t})$ را در اختیار داریم.

$$B'(X_{t+1}) = P(X_{t+1}|e_{1:t})$$

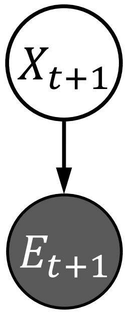
- در این صورت، پس از انجام مشاهده:

$$P(X_{t+1}|e_{1:t+1}) \propto \underbrace{P(e_{t+1}|X_{t+1})P(X_{t+1}|e_{1:t})}_{P(X_{t+1},e_{t+1}|e_{1:t})}$$

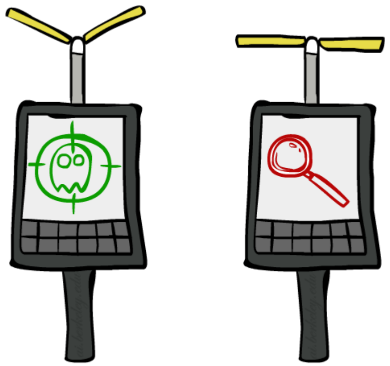
- یا به صورت فشرده‌تر: [به روز رسانی باور با توجه به مشاهدات]

$$B(X_{t+1}) \propto P(e_{t+1}|X_{t+1})B'(X_{t+1})$$

باور پس از مشاهده — باور پیش از مشاهده



$P(X_{t+1}|e_{1:t+1})$



مشاهده: مثال

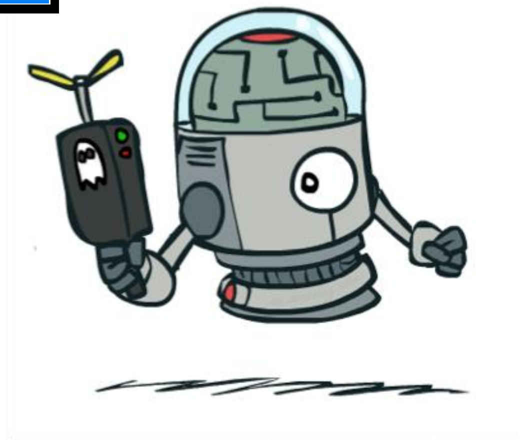
- با انجام مشاهدات جدید، باورها دوباره وزن‌دهی شده و عدم قطعیت «کاهش» می‌یابد.

<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	0.02	<0.01
<0.01	<0.01	<0.01	0.83	0.02	<0.01
<0.01	<0.01	0.11	<0.01	<0.01	<0.01
<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01

باور پس از مشاهده

0.05	0.01	0.05	<0.01	<0.01	<0.01
0.02	0.14	0.11	0.35	<0.01	<0.01
0.07	0.03	0.05	<0.01	0.03	<0.01
0.03	0.03	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01

باور پیش از مشاهده

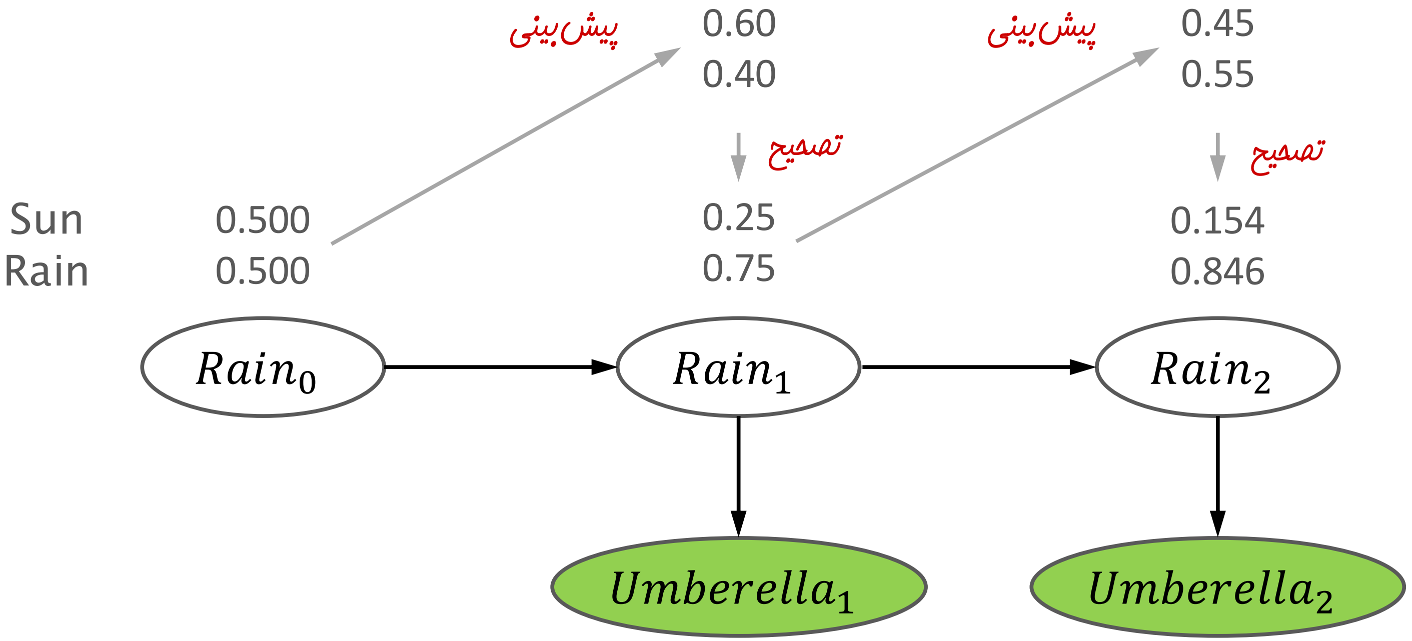


$$B(X) \propto P(e|X)B'(X)$$

یک مثال دیگر

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

X_t	U_t	$P(U_t \mid X_t)$
sun	$+u$	0.2
sun	$-u$	0.8
rain	$+u$	0.9
rain	$-u$	0.1



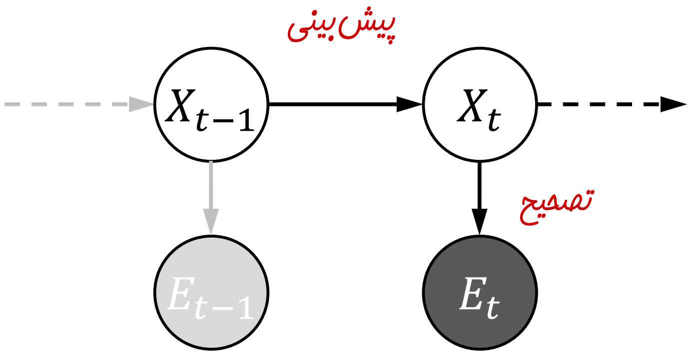
اجرای نمایشی: شکار ارواح مخفی به وسیله حسگر صوتی

الگوریتم رو به جلو

- هدف. محاسبه‌ی باور با توجه به شواهد در هر مرحله‌ی زمانی.

$$B_t(X) = P(X_t|e_{1:t})$$

- به روز رسانی.

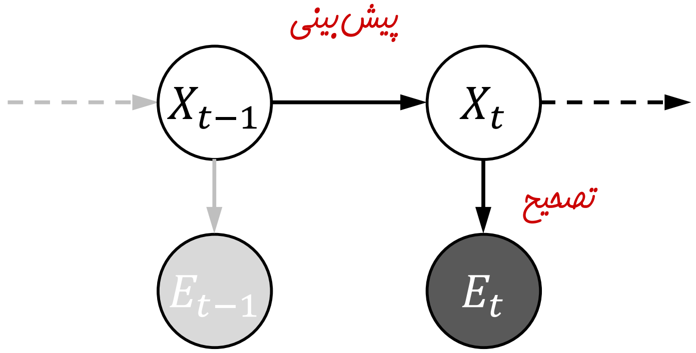


$$P(x_t|e_{1:t}) \propto_X P(x_t, e_{1:t})$$
$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, x_t, e_{1:t})$$
$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, e_{1:t-1}) P(x_t|x_{t-1}) P(e_t|x_t)$$
$$= P(e_t|x_t) \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, e_{1:t-1}) P(x_t|x_{t-1})$$

- الگوریتم رو به جلو. دقیقا برابر الگوریتم حذف متغیر به ترتیب X_1، X_2 و ...

به روز رسانی آنلاین باور

- در هر مرحله‌ی زمانی با $P(X|evidence)$ شروع می‌کنیم.
- پیش‌بینی. ابتدا به روز رسانی را برای زمان انجام می‌دهیم.



$$P(x_t|e_{1:t-1}) = \sum_{x_{t-1}} P(x_t|x_{t-1})P(x_{t-1}|e_{1:t-1})$$

- تصحیح. سپس باور را با توجه به شواهد جدید به روز رسانی می‌کنیم.

$$P(x_t|e_{1:t}) \propto_X P(X_t|e_{1:t-1}) \cdot P(e_t|x_t)$$

- الگوریتم رو به جلو. هر دو مرحله را با هم انجام می‌دهد.
- مشکل. پیچیدگی حافظه برابر با $|X|$ و پیچیدگی زمان برابر با $|X|^2$.

در هر مرحله‌ی زمانی