

مدل‌های گرافی احتمالات: احتمالات

سید ناصر رضوی www.snrazavi.ir

۱۳۹۸

- یکی از مهم‌ترین و مهیج‌ترین دستاوردهای یادگیری ماشین در دهه اخیر.
- به دست آوردن یک **درک سراسری** بر مبنای **مشاهدات محلی**.
- ایده کلیدی.
- **بازنمایی** دنیا به صورت مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی و روابط میان آنها [یک توزیع توأم]
- **یادگیری** توزیع از داده‌ها
- انجام **استنتاج** [محاسبه یک احتمال شرطی]
- **استنتاج تحت عدم قطعیت**.

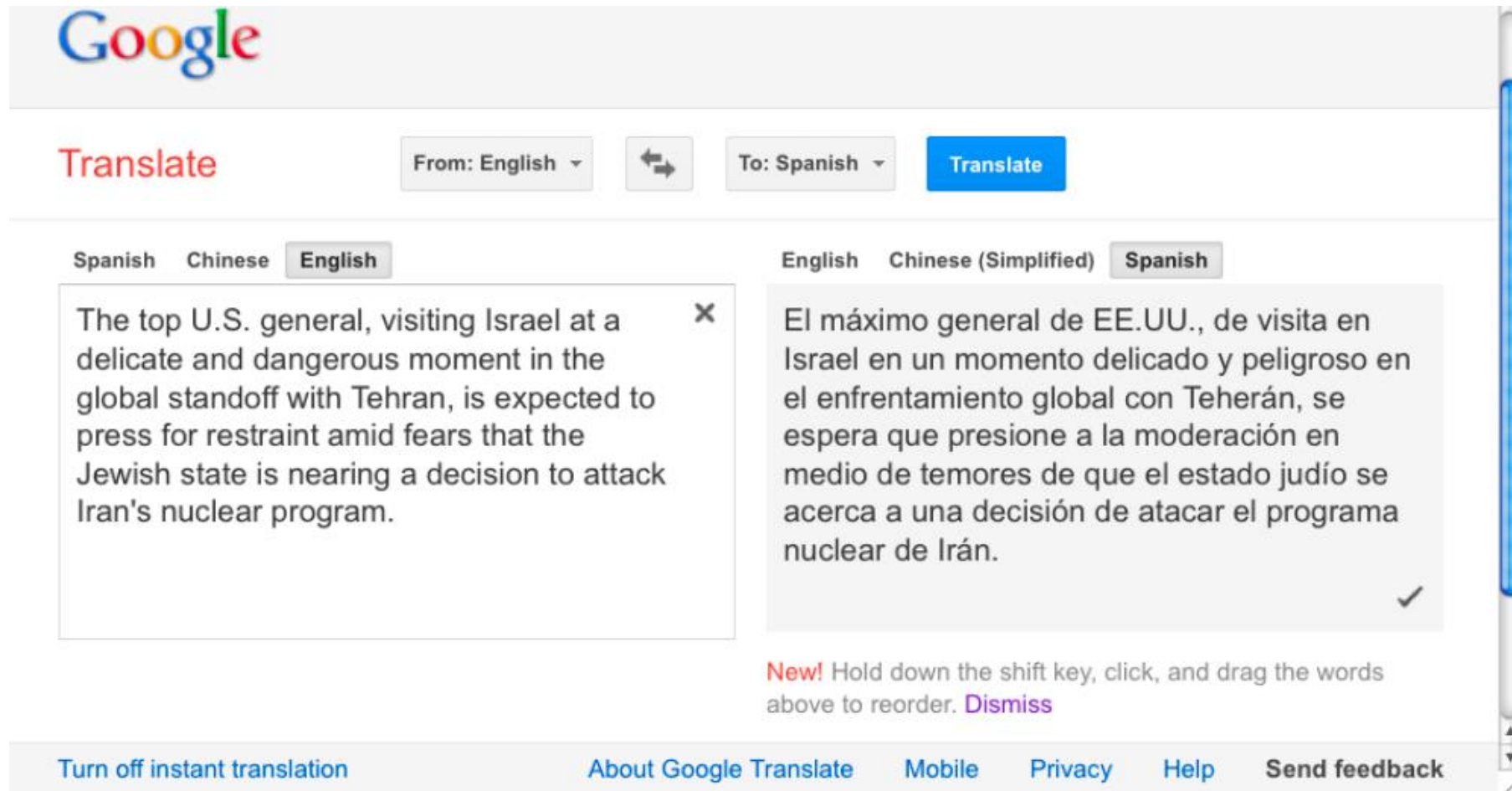
کاربردها: پاسخ‌گویی به پرسش‌ها

۳



کاربردها: ترجمه ماشینی

۴



The screenshot displays the Google Translate web interface. At the top, the Google logo is visible. Below it, the word "Translate" is shown in red. The interface includes dropdown menus for "From: English" and "To: Spanish", a swap button, and a blue "Translate" button. Below these, there are tabs for "Spanish", "Chinese", and "English" on the left, and "English", "Chinese (Simplified)", and "Spanish" on the right. The main content area shows the English text: "The top U.S. general, visiting Israel at a delicate and dangerous moment in the global standoff with Tehran, is expected to press for restraint amid fears that the Jewish state is nearing a decision to attack Iran's nuclear program." and its Spanish translation: "El máximo general de EE.UU., de visita en Israel en un momento delicado y peligroso en el enfrentamiento global con Teherán, se espera que presione a la moderación en medio de temores de que el estado judío se acerca a una decisión de atacar el programa nuclear de Irán." A "New!" message at the bottom suggests holding down the shift key to reorder words. The footer contains links for "Turn off instant translation", "About Google Translate", "Mobile", "Privacy", "Help", and "Send feedback".

Google

Translate

From: English To: Spanish Translate

Spanish Chinese English

English Chinese (Simplified) Spanish

The top U.S. general, visiting Israel at a delicate and dangerous moment in the global standoff with Tehran, is expected to press for restraint amid fears that the Jewish state is nearing a decision to attack Iran's nuclear program.

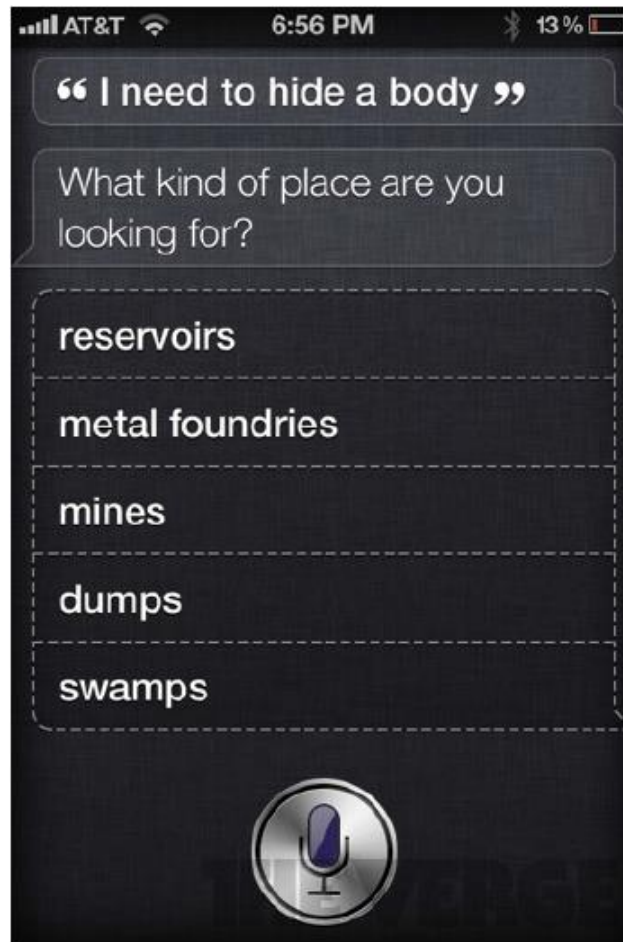
El máximo general de EE.UU., de visita en Israel en un momento delicado y peligroso en el enfrentamiento global con Teherán, se espera que presione a la moderación en medio de temores de que el estado judío se acerca a una decisión de atacar el programa nuclear de Irán.

New! Hold down the shift key, click, and drag the words above to reorder. Dismiss

Turn off instant translation About Google Translate Mobile Privacy Help Send feedback

کاربردها: شناسایی گفتار

۵



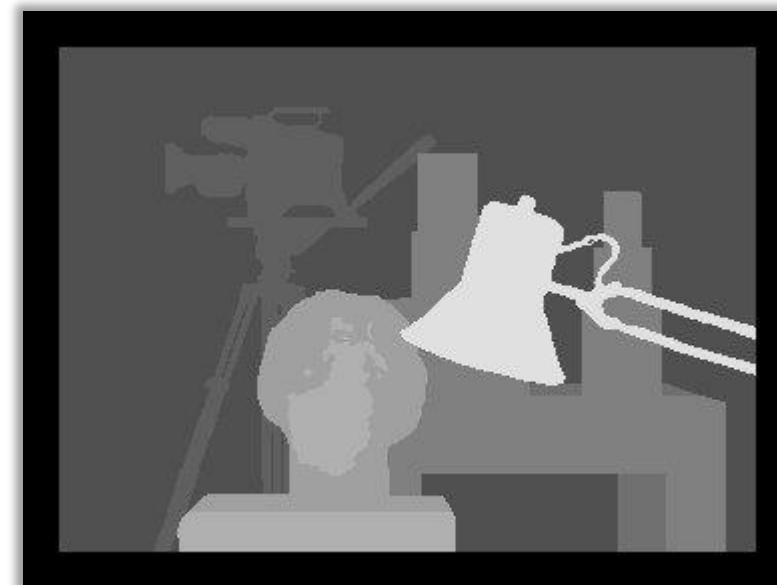
کاربردها: بینایی ۳-بعدی

۶

ورودی: دو تصویر



خروجی: اطلاعات ۳-بعدی



سرفصل درس

□ بازنمایی، یادگیری، استنتاج.

□ ابتدا در ساده‌ترین شکل ممکن:

□ متغیرهای گسسته

□ مدل‌های کاملاً قابل مشاهده

□ استنتاج و یادگیری دقیق

□ سپس تعمیم می‌دهیم:

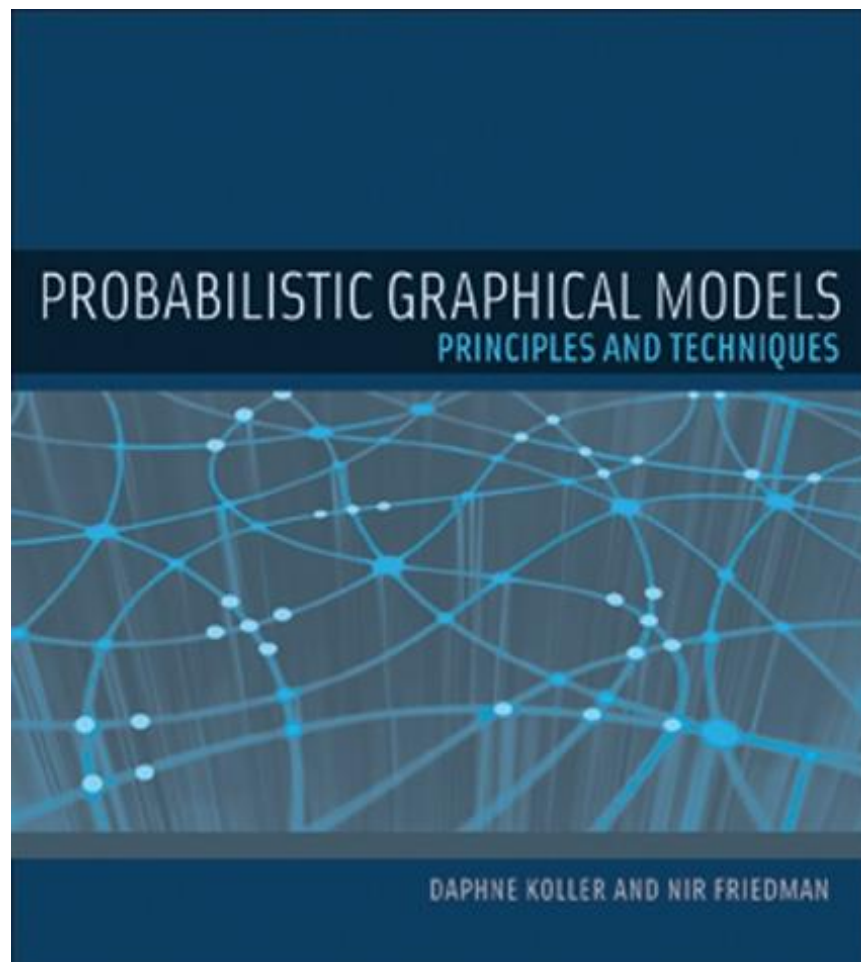
□ متغیرهای پیوسته

□ داده‌های قابل مشاهده به صورت جزئی [متغیرهای مخفی]

□ استنتاج و یادگیری تقریبی

مراجع و منابع (۱)

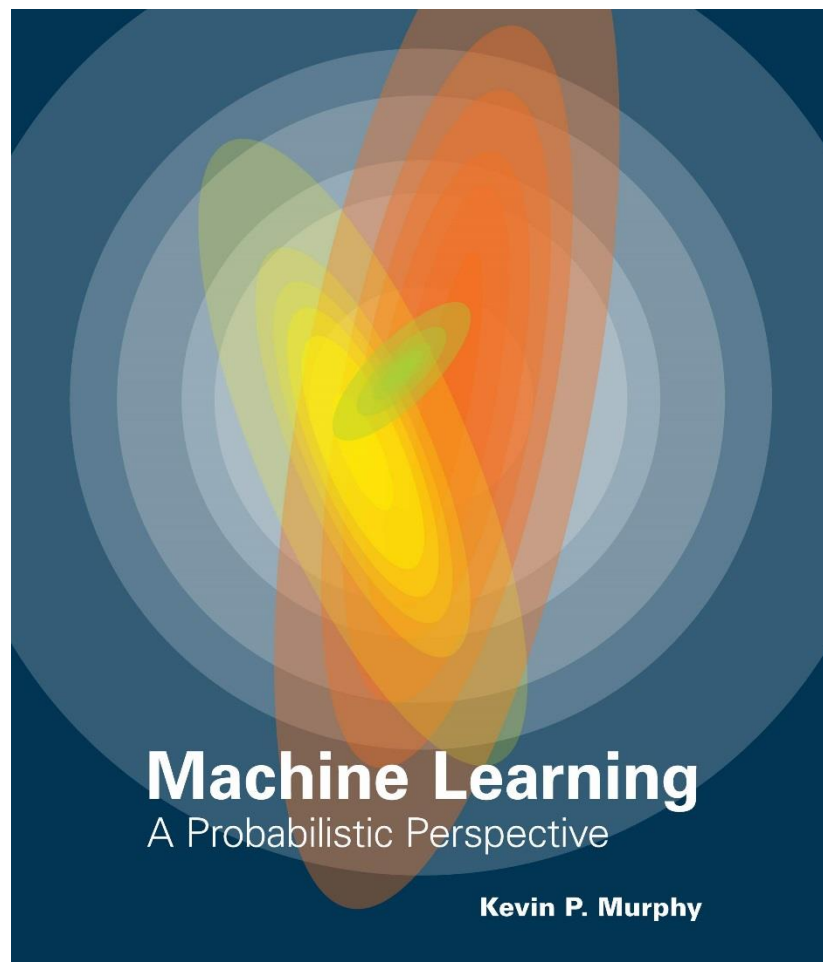
۸



- مدل‌های گرافی احتمالی: اصول و روش‌ها.
- دافنه کولر و نیر فرایدمن [۲۰۰۹]

مراجع و منابع (۲)

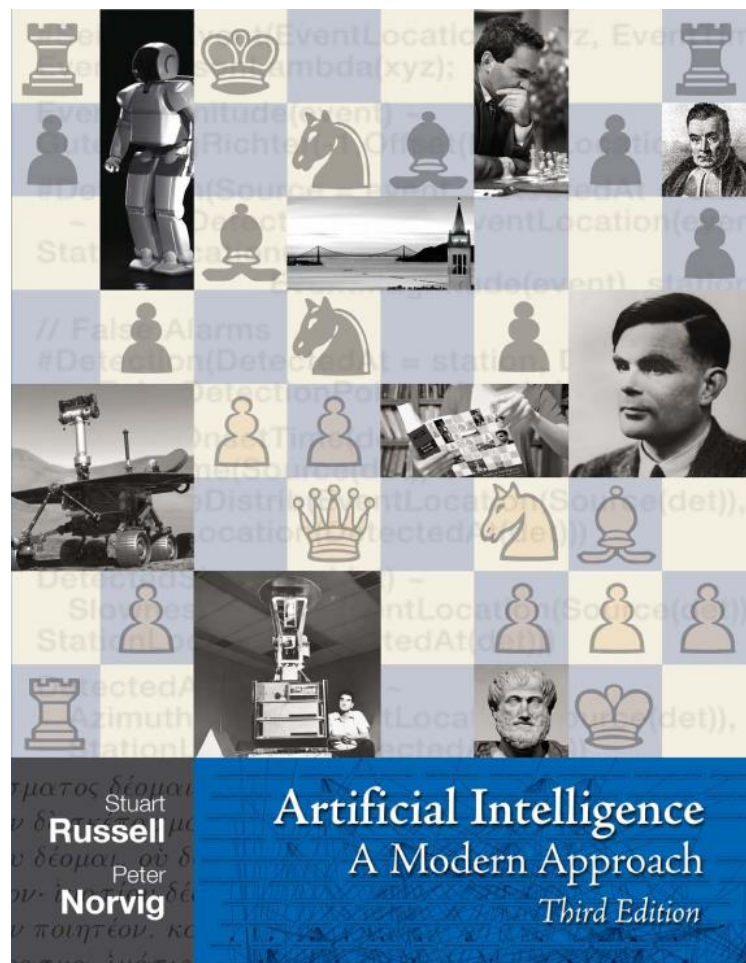
۹



□ یادگیری ماشین: یک دیدگاه احتمالاتی
□ کوین مورفی [۲۰۱۲]

مراجع و منابع (۳)

10



هوش مصنوعی: یک رویکرد نوین

راسل و نورویگ؛ ویراست سوم [۲۰۱۰]

پیش‌نیازها و ارزیابی

۱۱

□ پیش‌نیازها.

- یادگیری ماشین
- آشنایی با مفاهیم ابتدایی از آمار و احتمالات
- الگوریتم‌ها [برنامه‌ریزی پویا، الگوریتم‌های گراف، پیچیدگی]
- حسابان

□ ارزیابی.

- تمرین‌ها [۲۵ درصد]
- پروژه و ارائه [۲۵ درصد]
- آزمون پایان ترم [۵۰ درصد]





□ احتمالات.

□ متغیرهای تصادفی

□ توزیع توأم و توزیع حاشیه‌ای

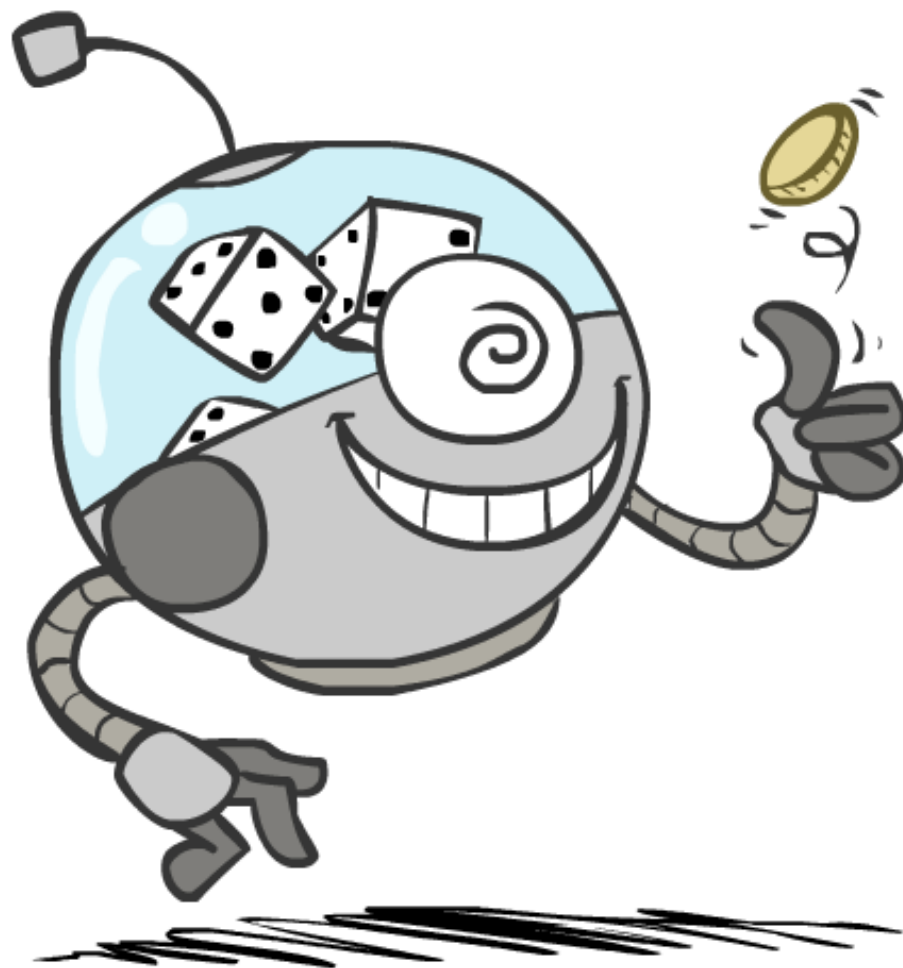
□ توزیع شرطی

□ قاعده ضرب، قاعده زنجیری و قاعده بیز

□ استنتاج

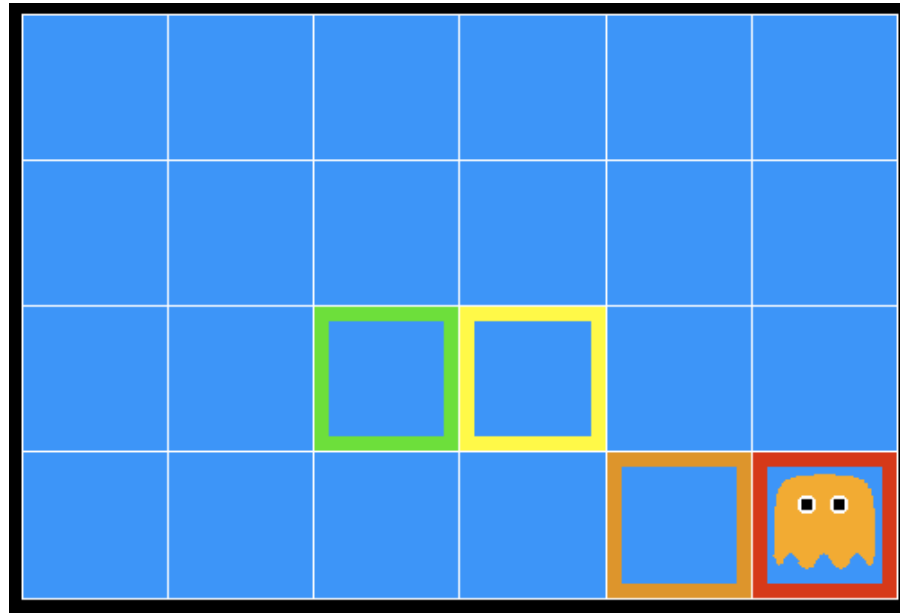
□ استقلال

□ استقلال شرطی



استنتاج در محیط عامل (روح‌یاب)

۱۴



□ در یکی از خانه‌های گرید یک روح وجود دارد.

□ حسگرهای عامل اطلاعاتی در مورد فاصله هر خانه تا مکان روح در اختیار عامل قرار می‌دهند.

قرمز

□ در خانه‌ای که روح قرار دارد:

نارنجی

□ خانه‌های با فاصله ۱ یا ۲:

زرد

□ خانه‌های با فاصله ۳ یا ۴:

سبز

□ خانه‌های با فاصله ۵ یا بیشتر:

□ اطلاعات حسگرها دارای نویز است، اما خوشبختانه $P(\text{Color} | \text{Distance})$ را می‌دانیم.

$P(\text{red} 3)$	$P(\text{orange} 3)$	$P(\text{yellow} 3)$	$P(\text{green} 3)$
0.05	0.15	0.5	0.3

اجرای نمایشی

۱۵

□ مثال. یافتن مکان روح در گرید.

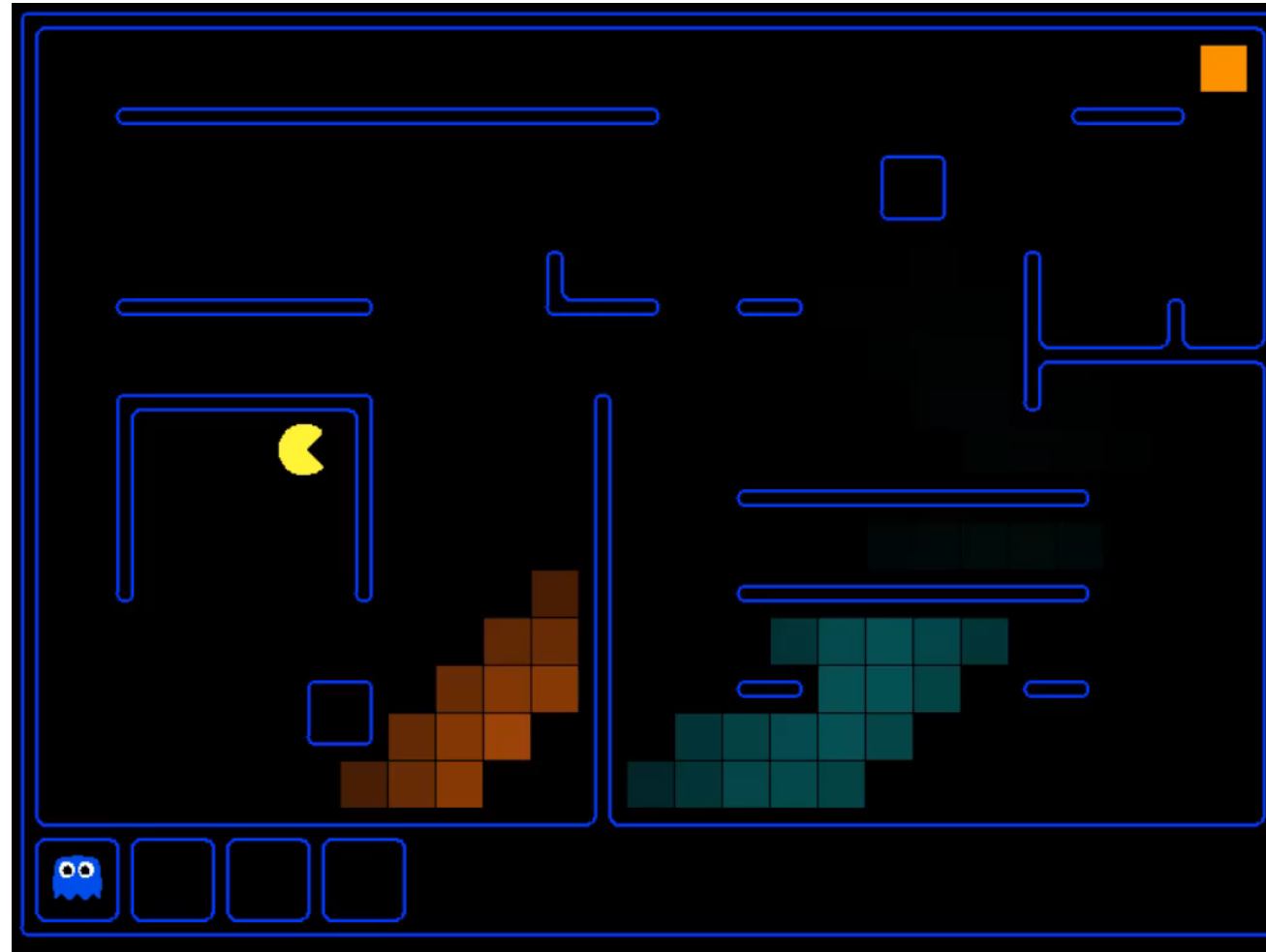
0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11

0.17	0.10	0.10
0.09	0.17	0.10
<0.01	0.09	0.17

<0.01	<0.01	0.03
<0.01	0.05	0.05
<0.01	0.05	0.81

اجرای نمایشی

۱۶



□ مفاهیم پایه‌ای.

□ **متغیر مشاهده شده [شواهد]:** عامل در مورد برخی از جنبه‌های محیط اطلاعات قطعی دارد.
[مانند اطلاعات دریافتی از حسگرها یا نشانه‌ها]

□ **متغیر مشاهده نشده:** عامل باید در مورد برخی دیگر از جنبه‌های محیط استدلال کند.
[مانند مکان یک شی یا نوع بیماری]

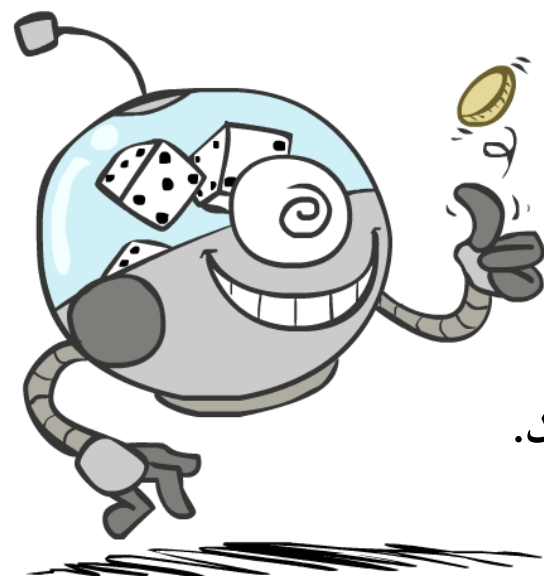
□ **مدل:** عامل می‌داند چه ارتباطی میان متغیرهای معلوم و مجهول وجود دارد.

□ **استدلال احتمالاتی.** یک چارچوب به منظور مدیریت باورها و دانش درباره محیط.

متغیرهای تصادفی

۱۸

□ **متغیر تصادفی.** جنبه‌ای از محیط که ممکن است در مورد آن عدم قطعیت داشته باشیم.



□ $R =$ آیا هوا بارانی است؟

□ $T =$ هوا سرد است یا گرم؟

□ $D =$ چقدر طول می‌کشد به فرودگاه برسیم؟

□ $L =$ روح در کدام خانه قرار دارد؟

□ **دامنه.** همانند متغیرهای CSP ، متغیرهای تصادفی دارای یک دامنه هستند.

□ دامنه R : {درست، نادرست} یا $\{+r, -r\}$

□ دامنه T : {سرد، گرم}

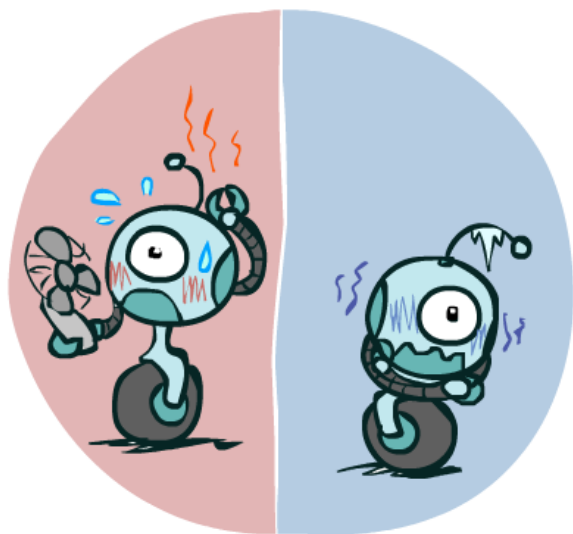
□ دامنه D : $[0, \infty)$

□ دامنه L : مکان‌های ممکن در گرید

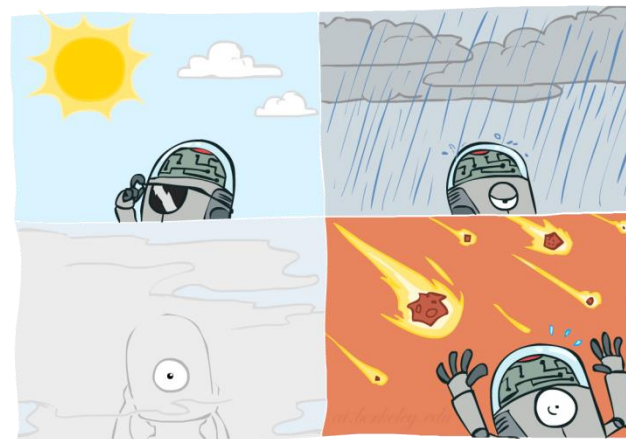
توابع توزیع احتمال

۱۹

□ تابع توزیع احتمال. انتساب یک احتمال به هر یک از مقادیر دامنه.



T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5



W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

توابع توزیع احتمال

۲۰

□ نمایش توابع توزیع احتمال. یک جدول بیانگر احتمال مربوط به هر مقدار.

T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5

W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

$$\leftarrow P(W = \text{rain}) = 0.1 = P(\text{rain})$$

↑
فلاشه نویسی

□ ویژگی‌ها.

$$\forall x \ P(X = x) \geq 0$$

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

توابع توزیع احتمال توأم

۲۱

□ تابع توزیع احتمال توأم بر روی یک مجموعه از متغیرها مانند $X_1, X_2, \dots, X_n$

□ بیانگر احتمال وقوع هر انتساب ممکن از مقادیر به متغیرها.

□ اندازه توزیع؟ d^n اگر دامنه هر متغیر شامل d مقدار باشد.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ ویژگی‌ها.

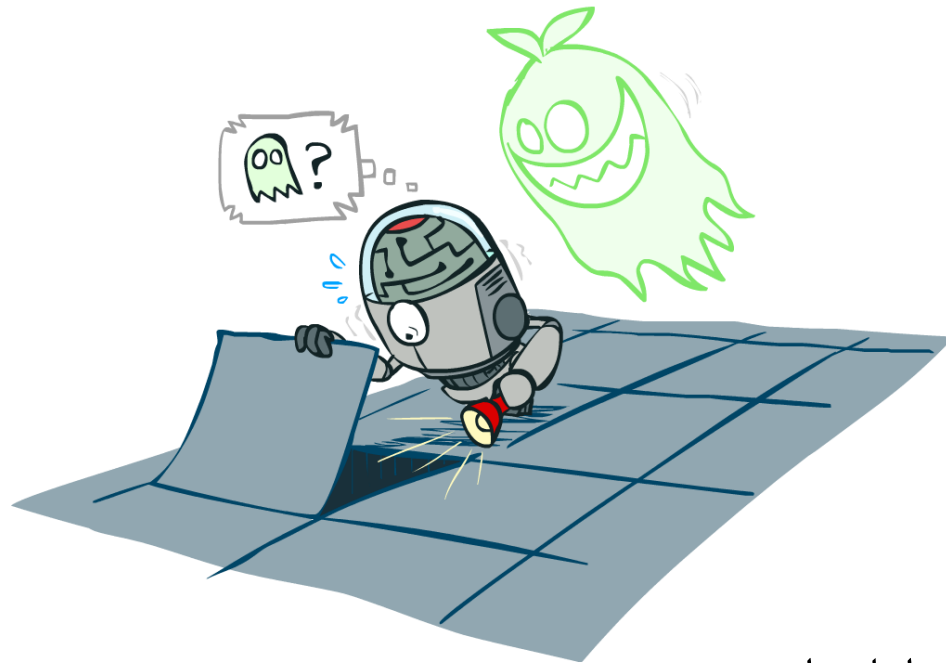
$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

مدل‌های احتمالاتی

۲۲

- مدل احتمالاتی. یک توزیع توأم بر روی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی.
- بیانگر جنبه‌هایی از محیط که برای ما اهمیت دارند!



- مدل‌های احتمالاتی.
- مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به همراه دامنه هر یک.
- هر انتساب ممکن از مقادیر به متغیرها یک پیامد نام دارد.
- توزیع احتمال توأم: بیانگر میزان محتمل بودن هر پیامد ممکن.
- ایده‌آل این است که فقط برخی از متغیرها به طور مستقیم در تعامل باشند.

رویدادها

۲۳

□ رویداد. یک مجموعه از پیامدها!

$$P(E) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E} P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ با داشتن توزیع توأم، می‌توانیم احتمال هر رویداد ممکن را محاسبه کنیم.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(\text{hot}, \text{sun}) = 0.4$$

رویدادها

۲۴

□ رویداد. یک مجموعه از پیامدها!

$$P(E) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E} P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ با داشتن توزیع توأم، می‌توانیم احتمال هر رویداد ممکن را محاسبه کنیم.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(hot) = 0.4 + 0.1$$

رویدادها

۲۵

□ رویداد. یک مجموعه از پیامدها!

$$P(E) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E} P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

□ با داشتن توزیع توأم، می‌توانیم احتمال هر رویداد ممکن را محاسبه کنیم.

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(\text{hot or sun}) = 0.4 + 0.1 + 0.2$$

پرسش کلاسی: رویدادها

۲۶

□ س. احتمال وقوع هر یک از رویدادهای زیر را محاسبه کنید.

$$P(+x, -y) =$$

$$P(-y) =$$

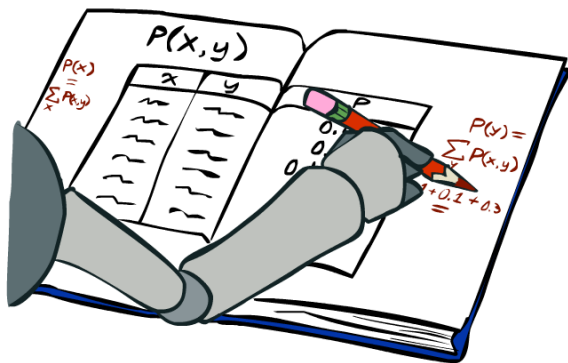
$$P(+x \text{ or } -y) =$$

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.4
$+x$	$-y$	0.1
$-x$	$+y$	0.2
$-x$	$-y$	0.3

توابع توزیع حاشیه‌ای

۲۷

- توزیع حاشیه‌ای. توزیع احتمال یک زیرمجموعه از متغیرها.
- بخشی از جدول توزیع احتمال حاصل از حذف تعدادی متغیر.



T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$P(t) = \sum_w P(t, w)$$



T	$P(T)$
hot	0.5
cold	0.5



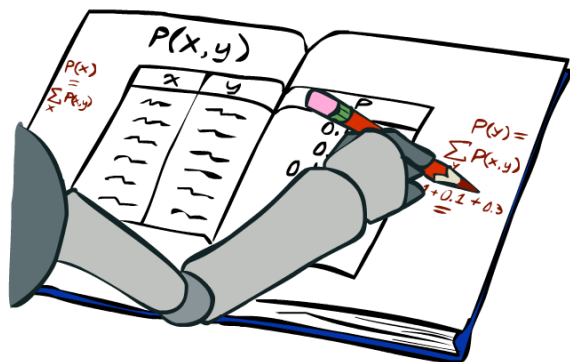
$$P(w) = \sum_t P(t, w)$$

W	$P(W)$
sun	0.6
rain	0.4

توابع توزیع حاشیه‌ای

۲۸

- توزیع حاشیه‌ای. توزیع احتمال یک زیرمجموعه از متغیرها.
- بخشی از جدول توزیع احتمال حاصل از حذف تعدادی متغیر.



$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(t) = \sum_w P(t, w)$$



$$P(w) = \sum_t P(t, w)$$

	sun	rain	$P(T)$
hot	0.4	0.1	0.5
cold	0.2	0.3	0.5
$P(W)$	0.6	0.4	1

پرسش کلاسی: توابع توزیع حاشیه‌ای

۲۹

□ س. با توجه به توزیع توأم داده شده، توزیع حاشیه‌ای مربوط به $P(X)$ و $P(Y)$ را محاسبه کنید.

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.2
$+x$	$-y$	0.3
$-x$	$+y$	0.4
$-x$	$-y$	0.1

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$



X	$P(X)$
$+x$	
$-x$	



$$P(y) = \sum_x P(x, y)$$

Y	$P(Y)$
$+y$	
$-y$	

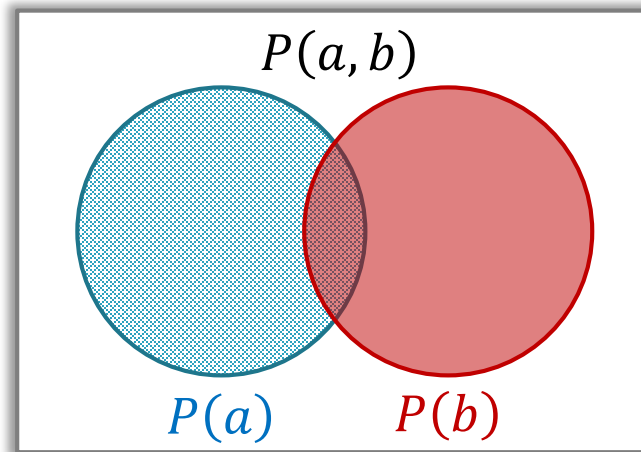
احتمال شرطی

۳۰

□ توزیع شرطی. یک رابطه ساده میان توزیع‌های توأم و حاشیه‌ای.

$$P(a|b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3



$$P(W = \text{sun} | T = \text{cold})$$

$$= \frac{P(W = \text{sun}, T = \text{cold})}{P(T = \text{cold})} = \frac{0.2}{0.5}$$

$$\begin{aligned} &= P(T = \text{cold}, W = \text{sun}) + P(T = \text{cold}, W = \text{rain}) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5 \end{aligned}$$

پرسش کلاسی: احتمال شرطی

۳۱

□ س. با توجه به توزیع توأم داده شده، هر یک از احتمال‌های شرطی خواسته شده را محاسبه کنید.

$$P(+x \mid +y) =$$

$$P(-x \mid +y) =$$

$$P(-y \mid +x) =$$

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.2
$+x$	$-y$	0.3
$-x$	$+y$	0.4
$-x$	$-y$	0.1

توزیع‌های شرطی

۳۲

□ توزیع شرطی. یک توزیع احتمال بر روی زیرمجموعه‌ای از متغیرها با ثابت در نظر گرفتن مقدار سایر متغیرها.

$P(W T)$	$P(W hot)$	
	W	
	sun	0.8
	rain	0.2
	$P(W cold)$	
	W	
	sun	0.4
	rain	0.6

توزیع‌های شرطی

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

توزیع احتمال توأم

ترفند نرمال سازی

۳۳

□ ترفند نرمال سازی.

$$\begin{aligned}P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\&= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4\end{aligned}$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

W	$P(W c)$
sun	0.4
rain	0.6

$$\begin{aligned}P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\&= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\&= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6\end{aligned}$$

ترفند نرمال سازی

۳۴

□ ترفند نرمال سازی.

$$\begin{aligned} P(W = s|T = c) &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = s, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\ &= \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4 \end{aligned}$$

T	W	$P(T, W)$
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

انتخاب توزیع های توأم
منطبق با شواهد



W	$P(W, c)$
sun	0.2
rain	0.3

نرمال سازی



W	$P(W c)$
sun	0.4
rain	0.6

$$\begin{aligned} P(W = r|T = c) &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c)} \\ &= \frac{P(W = r, T = c)}{P(T = c, W = s) + P(T = c, W = r)} \\ &= \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 0.6 \end{aligned}$$

پرسش کلاسی: ترفند نرمال سازی

۳۵

□ ترفند نرمال سازی.

$$P(X|Y = -y) ?$$

X	Y	$P(X, Y)$
$+x$	$+y$	0.2
$+x$	$-y$	0.3
$-x$	$+y$	0.4
$-x$	$-y$	0.1

انتخاب توزیع های توأم
منطبق با شواهد



X	$P(X, -y)$
$+x$	0.3
$-x$	0.1

نرمال سازی



X	$P(X -y)$
$+x$	0.75
$-x$	0.25

نرمال سازی

۳۶

□ مراحل نرمال سازی.

□ مرحله ۱: محاسبه مجموع مقادیر (Z) .

□ مرحله ۲: تقسیم هر یک از مقادیر بر Z .

W	$P(W, c)$	$\xrightarrow[\text{نرمال سازی}]{Z = 0.5}$	W	$P(W c)$
sun	0.2		sun	0.4
rain	0.3		rain	0.6

T	W	$P(T, W)$	$\xrightarrow[\text{نرمال سازی}]{Z = 50}$	T	W	$P(T, W)$
hot	sun	20		hot	sun	0.4
hot	rain	5		hot	rain	0.1
cold	sun	10		cold	sun	0.2
cold	rain	15		cold	rain	0.3

استنتاج احتمالاتی

۳۷



□ هدف. محاسبه یک احتمال از روی سایر احتمالات شناخته شده.

□ در استنتاج احتمالاتی، معمولاً احتمال‌های شرطی را محاسبه می‌کنیم.

□ مانند احتمال به موقع رسیدن به شرطی که تصادف رخ نداده باشد.

□ احتمالات شرطی: بیانگر **باور** عامل با توجه به شواهد دریافتی.

□ احتمال‌ها با دریافت شواهد جدید تغییر می‌کنند.

□ دریافت شواهد جدید باعث به روز رسانی باورها می‌شود.

$$P(\text{on time} \mid \text{no accident}) = 0.9$$

$$P(\text{on time} \mid \text{no accident}, 5:00 \text{ a.m.}) = 0.95$$

$$P(\text{on time} \mid \text{no accident}, 5:00 \text{ a.m.}, \text{raining}) = 0.80$$

استنتاج به وسیله شمارش

۳۸

$$P(Q \mid E_1 \dots E_k) = ?$$

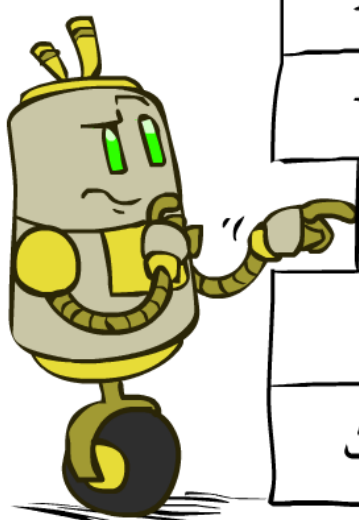
□ شکل کلی.

□ متغیرهای مشاهده شده: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$

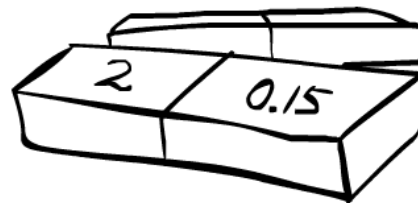
□ متغیر(های) مورد پرس و جو: Q

□ متغیرهای مخفی: $H_1, H_2, \dots, H_r$

□ مرحله ۱. انتخاب سطرهای سازگار با شواهد!



x	$P(x)$
-3	0.05
-1	0.25
0	0.07
1	0.2
5	0.01

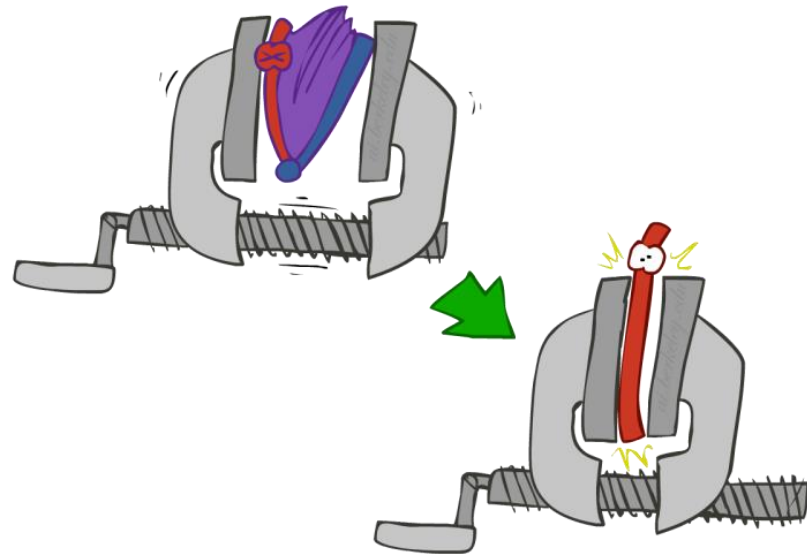


2	0.15
---	------

استنتاج به وسیله شمارش

۳۹

□ شکل کلی.



□ متغیرهای مشاهده شده: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$

□ متغیر(های) مورد پرس و جو: Q

□ متغیرهای مخفی: $H_1, H_2, \dots, H_r$

□ مرحله ۲. جمع زدن بر روی متغیرهای مخفی برای
به دست آوردن توزیع توأم متغیرهای مشاهده شده و
متغیر(های) پرس و جو.

$$P(Q, e_1, \dots, e_k) = \sum_{h_1 \dots h_r} P(Q, h_1, \dots, h_r, e_1, \dots, e_k)$$

استنتاج به وسیله‌ی شمارش

۴۰

□ شکل کلی.

□ متغیرهای مشاهده شده: $E_1 \dots E_k = e_1 \dots e_k$

□ متغیر(های) مورد پرس و جو: Q

□ متغیرهای مخفی: $H_1, H_2, \dots, H_r$

$$Z = \sum_q P(Q, e_1, \dots, e_k)$$

□ مرحله ۳. نرمال سازی

$$P(Q|e_1, \dots, e_k) = \frac{1}{Z} P(Q, e_1, \dots, e_k)$$

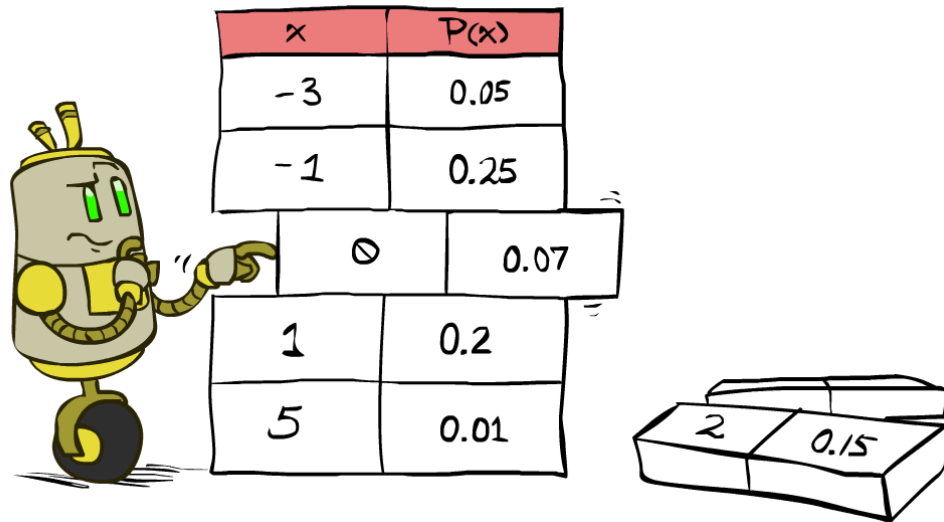
$$\times \frac{1}{Z}$$

استنتاج به وسیله شمارش

۴۱

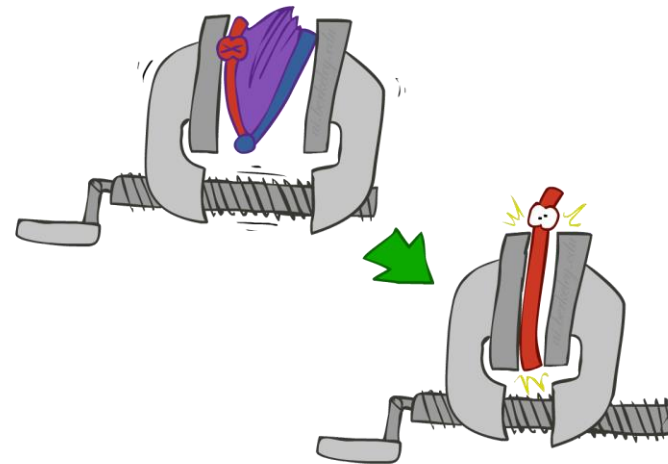
□ مشکلات.

□ پیچیدگی حافظه: $O(d^n)$



انتخاب سطرهای سازگار با شواهد

□ پیچیدگی زمانی: $O(d^n)$



$$\times \frac{1}{Z}$$

جمع زدن بر روی متغیرهای مفقود

نرمال سازی

استنتاج به وسیله شمارش

۴۲

□ استنتاج به وسیله شمارش.

$$P(\text{sun}) = 0.30 + 0.10 + 0.10 + 0.15$$

S	T	W	$P(S, T, W)$
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

استنتاج به وسیله شمارش

۴۳

□ استنتاج به وسیله شمارش.

$$P(\text{sun} \mid \text{winter}) = \frac{0.10 + 0.15}{0.50}$$

S	T	W	$P(S, T, W)$
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

استنتاج به وسیله شمارش

۴۴

□ استنتاج به وسیله شمارش.

$$P(\text{sun} \mid \text{winter}, \text{hot}) = \frac{0.10}{0.10 + 0.05}$$

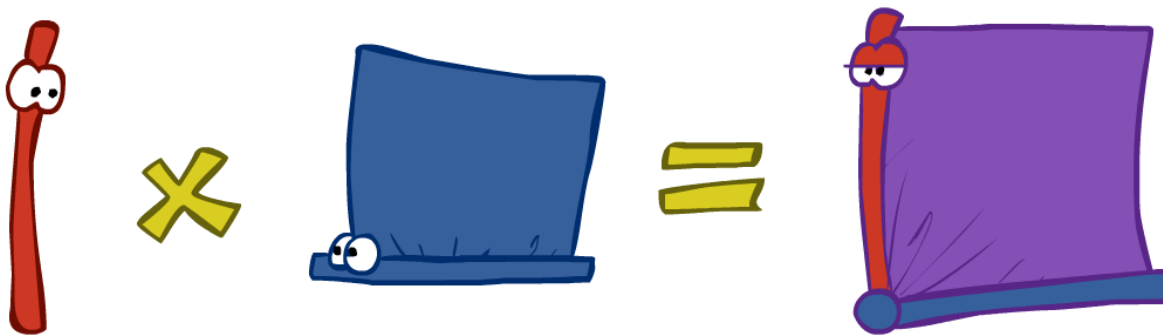
S	T	W	$P(S, T, W)$
summer	hot	sun	0.30
summer	hot	rain	0.05
summer	cold	sun	0.10
summer	cold	rain	0.05
winter	hot	sun	0.10
winter	hot	rain	0.05
winter	cold	sun	0.15
winter	cold	rain	0.20

قاعده ضرب

۴۵

□ هدف. محاسبه توزیع توأم از روی توزیع‌های شرطی.

$$P(y)P(x|y) = P(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$



□ مثال.

$$P(y)P(x|y) = P(x, y)$$

W	$P(W)$
sun	0.8
rain	0.2

×

D	W	$P(D W)$
wet	sun	0.1
wet	rain	0.7
dry	sun	0.9
dry	rain	0.3

=

D	W	$P(D, W)$
wet	sun	
wet	rain	
dry	sun	
dry	rain	

قاعده ضرب زنجیری

۴۷

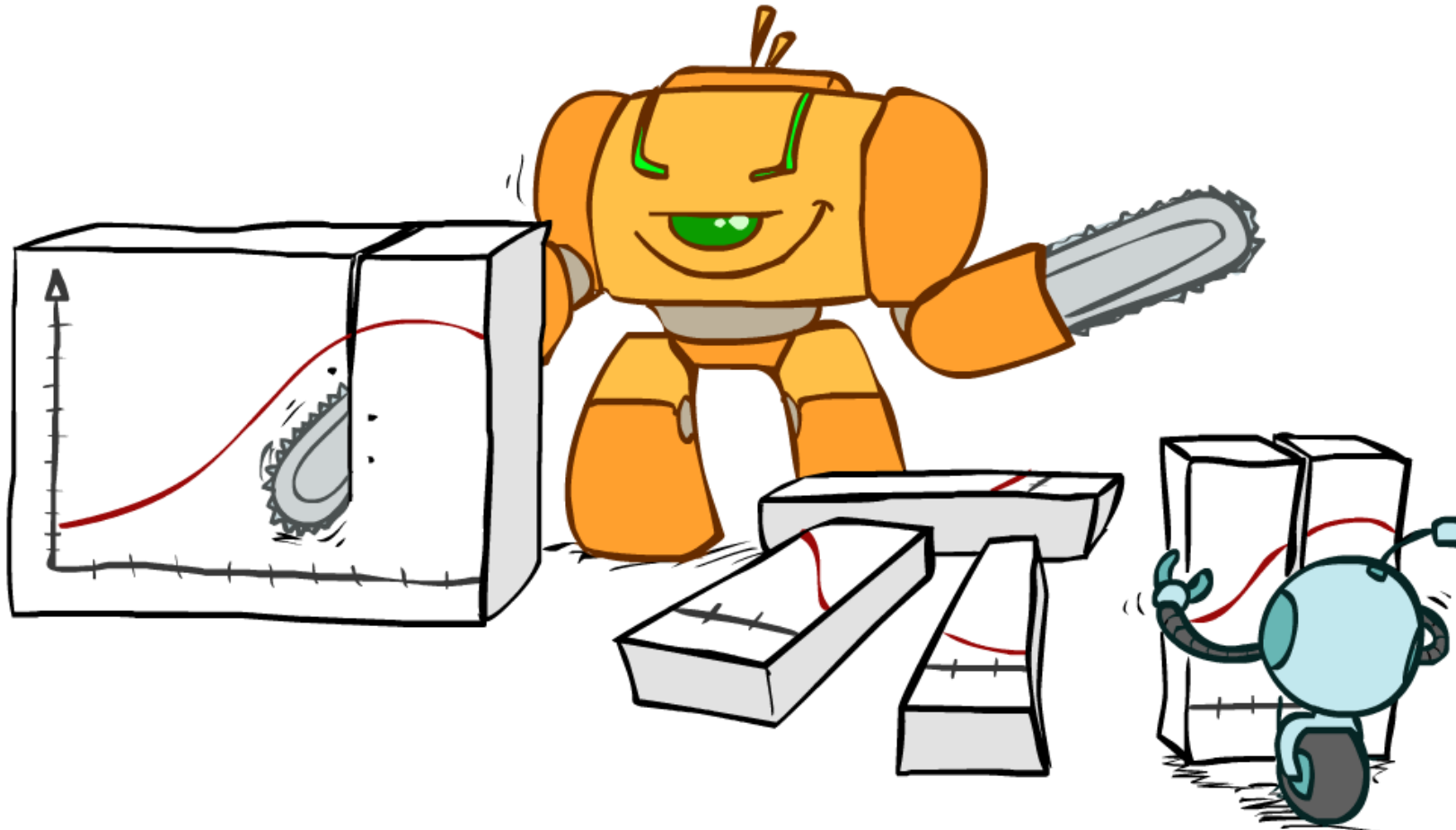
□ قاعده ضرب زنجیری.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i P(x_i | x_1 \dots x_{i-1})$$

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

□ س. چرا این رابطه همواره درست است؟

$$P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2) = P(x_1) \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_1)} \frac{P(x_1, x_2, x_3)}{P(x_1, x_2)}$$



□ دو روش مختلف برای فاکتورگیری از یک توزیع توأم بر روی دو متغیر.

$$P(x, y) = P(x)P(y|x) = P(y)P(x|y) \quad \longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)}$$

□ کاربردها.

□ ایجاد یک توزیع شرطی از روی معکوس آن.

□ در بسیاری از موارد محاسبه یکی از این دو توزیع شرطی ساده است،

اما محاسبه دیگری خیر!

□ پایه بسیاری از سیستم‌های هوش مصنوعی!



استنتاج به وسیله قاعده بیز

۵۰

□ مثال. تشخیص بیماری از روی نشانه‌ها.

$$P(Cause|Effect) = \frac{P(Effect|Cause)P(Cause)}{P(Effect)}$$

□ مثال. تشخیص مننژیت (M) با توجه به گرفتگی گردن (S).

$$P(+m) = 0.0001$$

$$P(+s|+m) = 0.8$$

$$P(+s|-m) = 0.01$$

$$P(+m|+s) = \frac{P(+s|+m)P(+m)}{P(+s)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.1} = 0.0008$$

پرسش کلاسی: قاعده بیز

۵۱

□ س. با توجه به دو توزیع داده شده در زیر:

D	W	$P(D W)$
wet	sun	0.1
wet	rain	0.7
dry	sun	0.9
dry	rain	0.3

W	$P(W)$
sun	0.8
rain	0.2

احتمال $P(W|dry)$ را محاسبه کنید.

عامل روح‌یاب: بازیابی

۵۲

0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11

□ فرض کنید دو توزیع زیر را در اختیار داریم:

□ **توزیع پیشین** بر روی مکان روح: $P(G)$

■ که به صورت یکنواخت توزیع شده است.

□ مدل حسگر: $P(R|G)$

■ یعنی می‌دانیم حسگر عامل چگونه عمل می‌کند.

■ R = اطلاعات مربوط به رنگ دریافت شده در خانه $(1, 1)$

■ مثلاً $P(yellow|[1,1]) = 0.1$

□ اکنون می‌توانیم **توزیع پسین** $P(G|r)$ را با استفاده از قاعده بیز محاسبه کنیم:

$$P(g|r) \propto P(r|g)P(g)$$

عامل روح‌یاب: بازیابی

۵۳

0.17	0.10	0.10
0.09	0.17	0.10
<0.01	0.09	0.17

□ فرض کنید دو توزیع زیر را در اختیار داریم:

□ **توزیع پیشین** بر روی مکان روح: $P(G)$

■ که به صورت یکنواخت توزیع شده است.

□ مدل حسگر: $P(R|G)$

■ یعنی می‌دانیم حسگر عامل چگونه عمل می‌کند.

■ R = اطلاعات مربوط به رنگ دریافت شده در خانه (۱, ۱)

■ مثلاً $P(yellow|[1,1]) = 0.1$

□ اکنون می‌توانیم **توزیع پسین** $P(G|r)$ را با استفاده از قاعده بیز محاسبه کنیم:

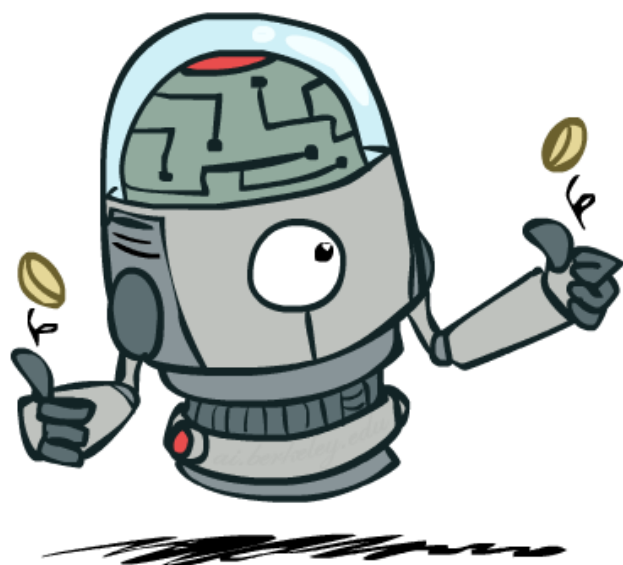
$$P(g|r) \propto P(r|g)P(g)$$

□ متغیرهای مستقل. در یک توزیع توأم، دو متغیر مستقل هستند اگر:

$$P(X, Y) = P(X)P(Y)$$

$$X \perp Y$$

$$\forall x, y \ P(x, y) = P(x)P(y)$$



□ در این صورت توزیع توأم قابل تجزیه به دو توزیع ساده‌تر است.

□ توجه. متغیرها معمولاً مستقل نیستند!

□ می‌توانیم استقلال را به عنوان یک فرض در مدل‌سازی به کار ببریم.

□ ساده‌سازی مدل!