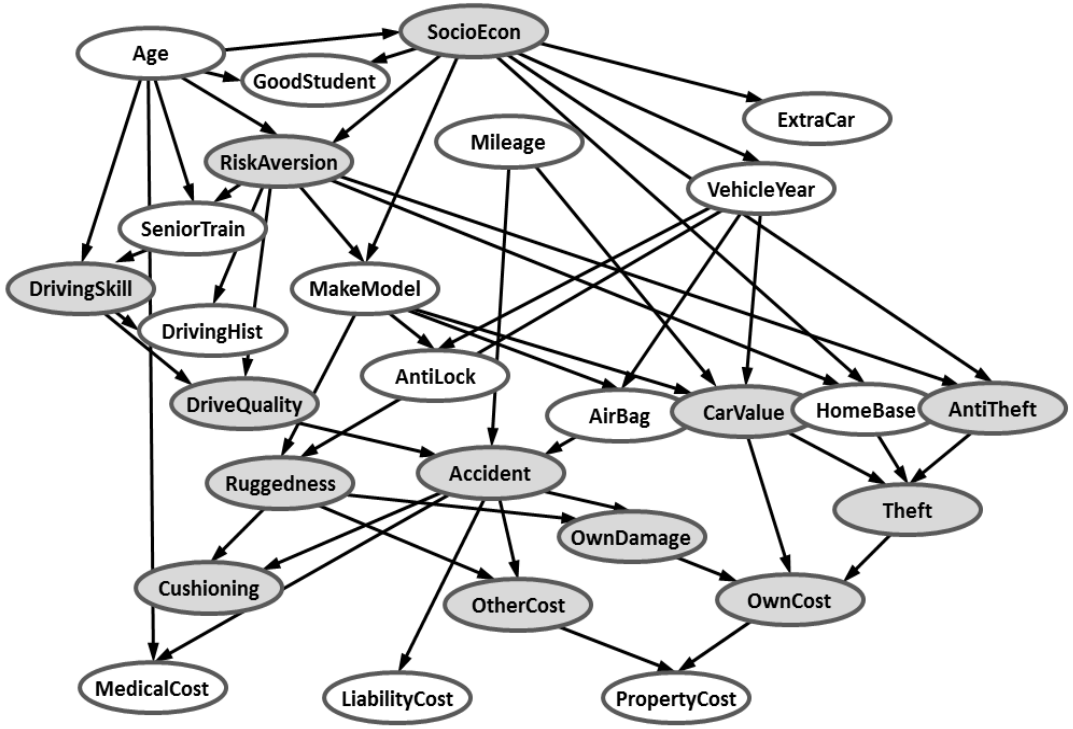
شبکه‌های بیز: استقلال شرطی

سید ناصر رضوی razavi@iust.ac.ir
۱۳۹۸

شبکه‌های بیز



- شبکه‌های بیز. نمایش مدل احتمالاتی مربوط به یک دامنه به شکل مؤثر (فشرده).

- مسایل مرتبط با شبکه‌های بیز:
  - استنتاج: با داشتن یک شبکه بیز، احتمال $P(X|e)$ چیست؟
  - بازنمایی: با گراف مربوط به یک شبکه بیز، کدام یک از توزیع‌ها را می‌توان نمایش داد؟
  - مدل‌سازی: برای یک دامنه مفروض، کدام شبکه بیز مناسب‌تر است؟

اندازه شبکه بیز

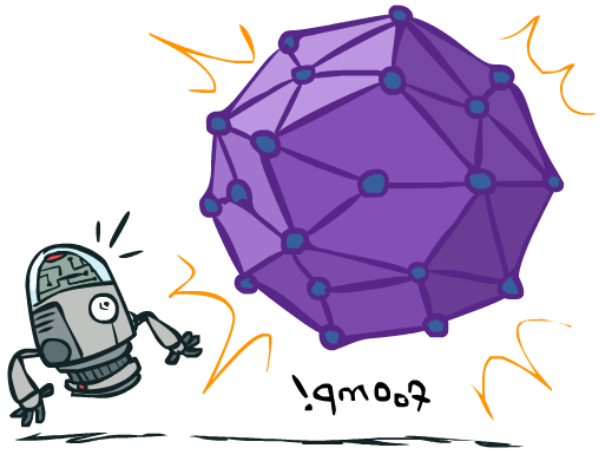
- س. اندازه یک توزیع توأم شامل N متغیر بولی چیست؟

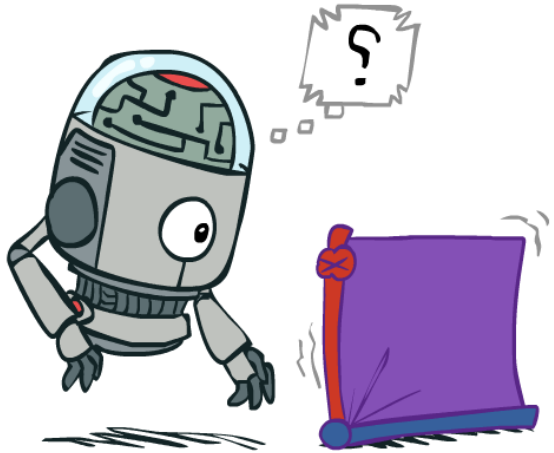
$2^N - 1$ بر حسب N نمایی

- س. با این فرض که هر رأس حداکثر k رأس والد داشته باشد، اندازه یک شبکه بیز با N رأس چیست؟

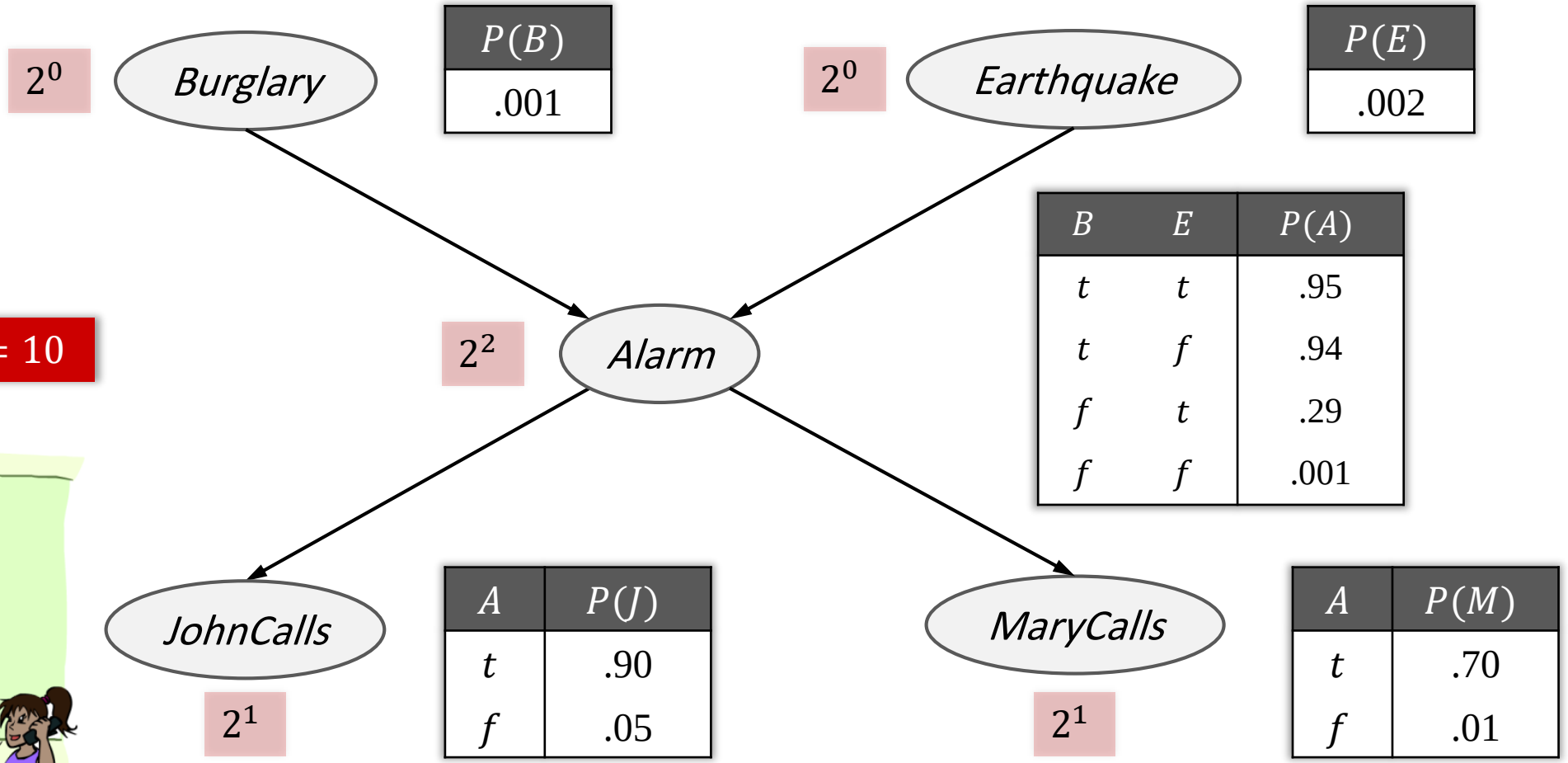
$$\sum_{i=1}^{N} 2^{|parents(X_i)|} \leq \sum_{i=1}^{N} 2^k = 2^k N$$ بر حسب N خطی

- مثال. $N = 30$ و $k = 5$
  - توزیع توأم: بیش از یک میلیارد
  - شبکه بیز: حداکثر ۹۶۰

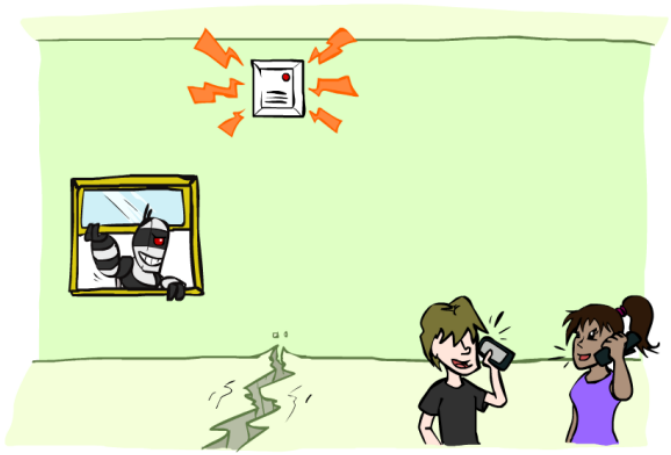




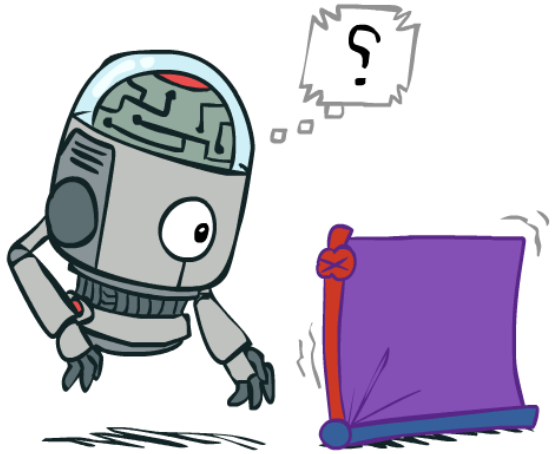
اندازه شبکه بیز

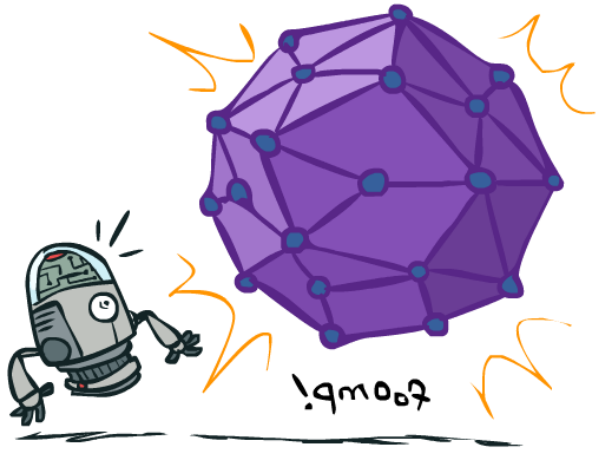


$$2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^1 + 2^2 = 10$$



اندازه شبکه بیز





- مقایسه اندازه.
  - توزیع توأم: نمایی $[2^N]$
  - شبکه بیز: خطی $[2^k N]$
- هر دو مدل امکان محاسبه $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را فراهم می‌کنند.
- مزایای شبکه بیز.
  - صرفه‌جویی قابل ملاحظه در مصرف حافظه [خطی در برابر نمایی]
  - استخراج جدول‌های مربوط به توزیع‌های شرطی محلی ساده‌تر
  - در پاسخ دادن به پرسش‌ها سریع‌تر

بازسازی توزیع توأم از شبکه‌ی بیز

- فرمول بازسازی شبکه بیز.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | parents(x_i))$$

  - معمولاً هیچ دلیلی وجود ندارد که بخواهیم تمام عناصر توزیع توأم را یک جا تولید کنیم.
  - بنابراین، هر زمان به عنصری نیاز داشته باشیم، همان موقع آن را محاسبه می‌کنیم.

- به منظور تأکید دوباره.
  - شبکه‌های بیز بر روی دامنه خود به طور ضمنی یک توزیع توأم تعریف می‌کنند، که با استفاده از توزیع‌های شرطی محلی و ساختار گراف قابل تعیین است.

استقلال شرطی

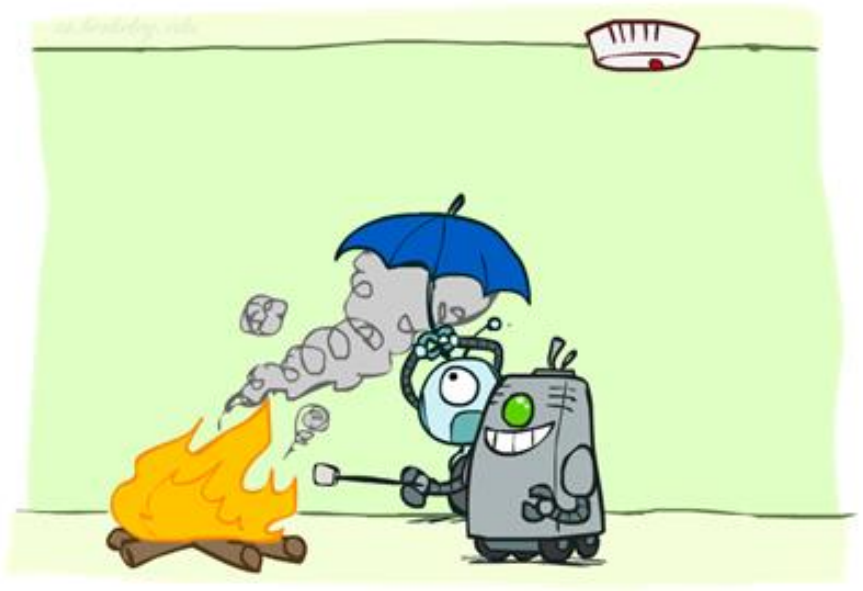
- یادآوری. استقلال و استقلال شرطی
  - X و Y مستقل هستند، اگر

$$\forall x, y : P(x, y) = P(x)P(y) \quad \Leftrightarrow \quad X \perp Y$$

  - X و Y مستقل شرطی هستند، اگر

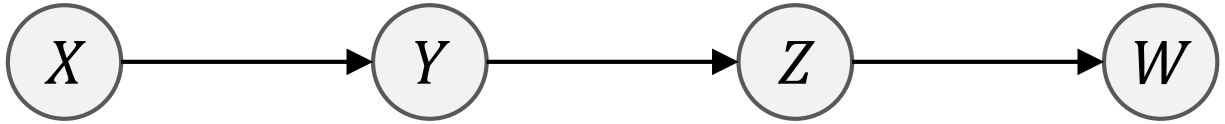
$$\forall x, y, z : P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z) \quad \Leftrightarrow \quad X \perp Y \mid Z$$

- توجه. استقلال و استقلال شرطی ویژگی‌های مربوط به توزیع هستند.



$$Alarm \perp Fire| Smoke$$

استقلال شرطی: مثال



- فرضیات مربوط به استقلال‌های شرطی که مستقیماً از ساده‌سازی‌های قاعده زنجیری می‌آیند:

$$Chain\ Rule: \quad P(X,Y,Z,W) = P(X)P(Y|X)P(Z|X,Y)P(W|X,Y,Z)$$

$$BNRF \quad : \quad P(X,Y,Z,W) = P(X)P(Y|X)P(Z|Y)P(W|Z)$$

$Z \perp X \mid Y$

$W \perp X \mid Z$

$W \perp Y \mid Z$

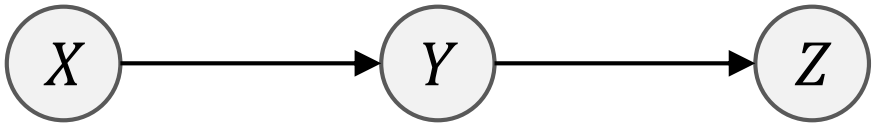
- فرضیات مربوط به استقلال‌های شرطی که به طور غیرمستقیم می‌توان نتیجه گرفت:

$W \perp X \mid Y$

استقلال شرطی در BN

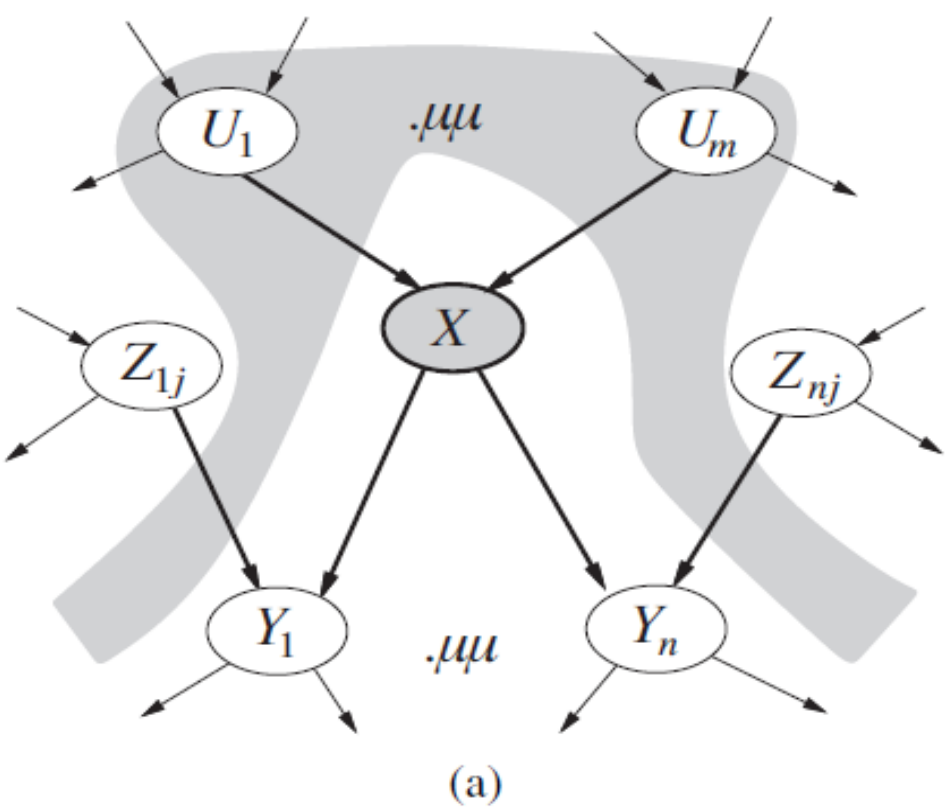
- پرسش‌های مهم در مورد شبکه بیز.
  - آیا با داشتن مجموعه‌ای از شواهد، دو رأس مفروض مستقل هستند؟
  - اگر پاسخ مثبت است، می‌توان با عملیات جبری آن را ثابت نمود.
  - اگر پاسخ منفی است، می‌توان یک مثال نقض ارائه نمود.

- مثال. آیا X و Z لزوماً مستقل هستند؟

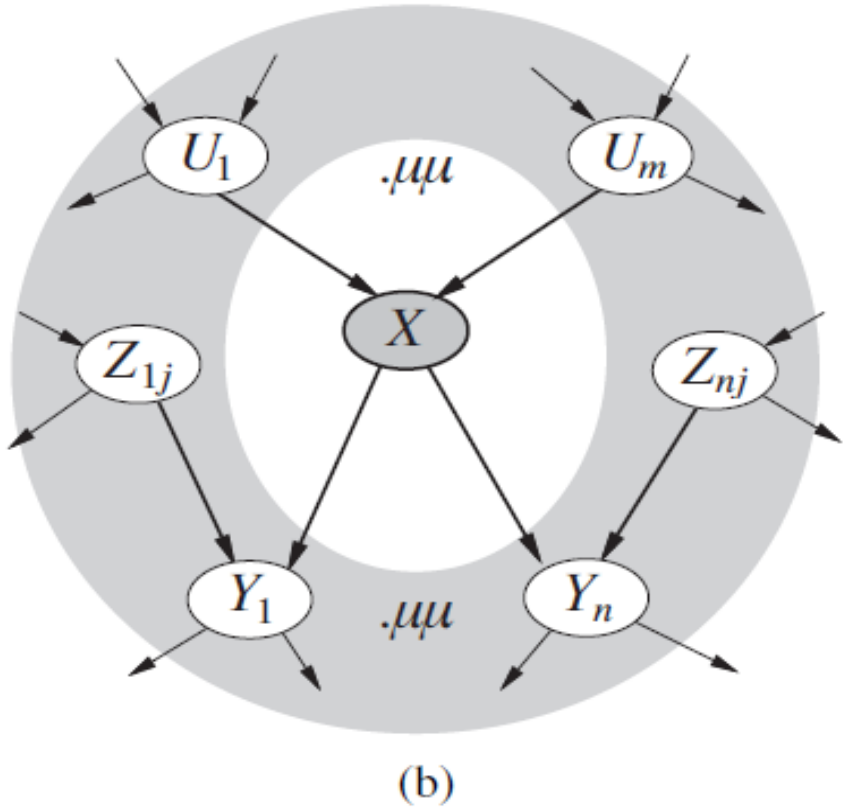


  - خیر، مثلا کاهش فشار باعث ریزش باران می‌شود و ریزش باران باعث افزایش ترافیک می‌شود.
  - در نتیجه، X و Z می‌توانند بر روی یکدیگر تأثیر بگذارند. [از طریق Y]

استقلال شرطی در BN

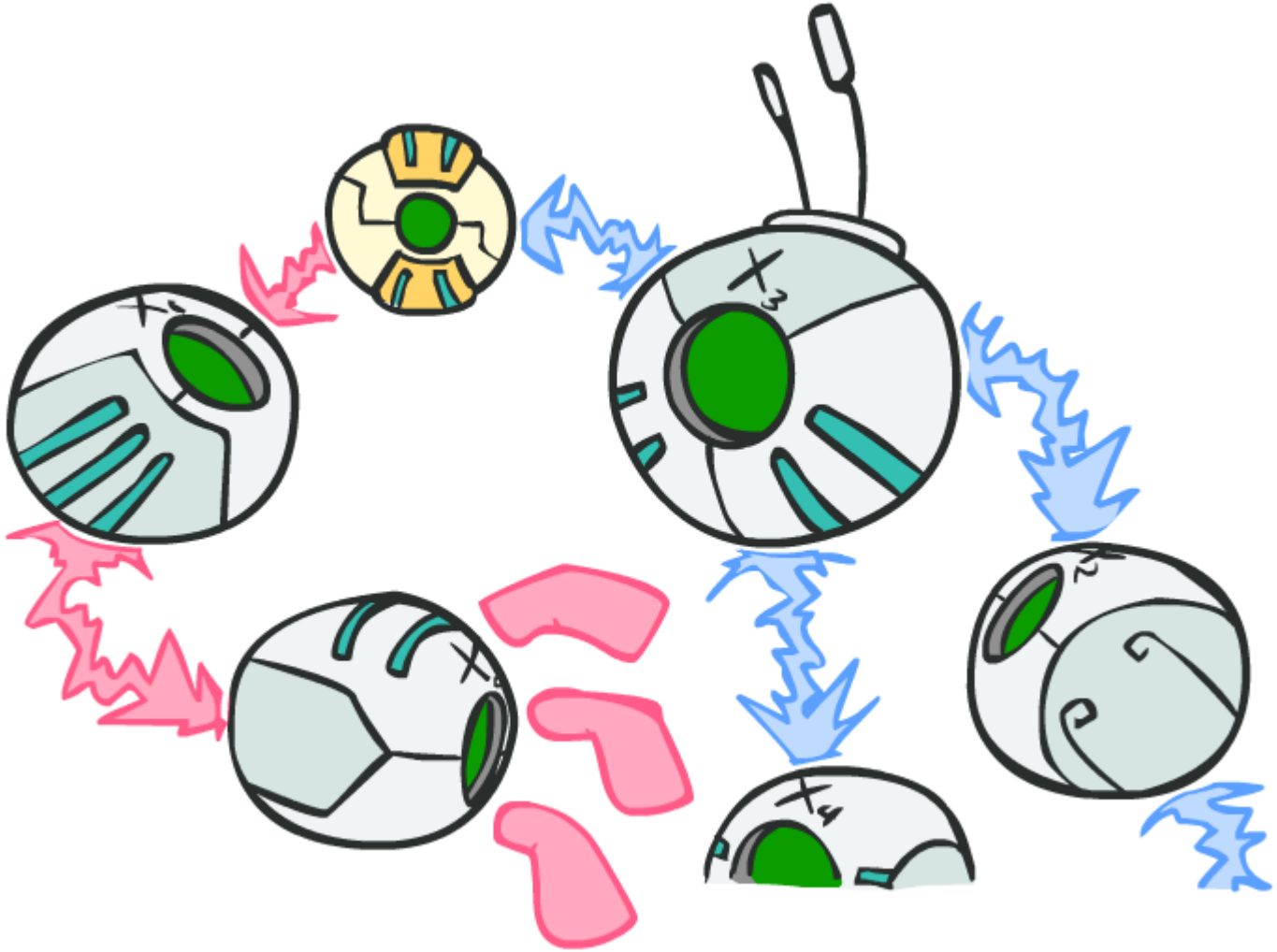


(a)



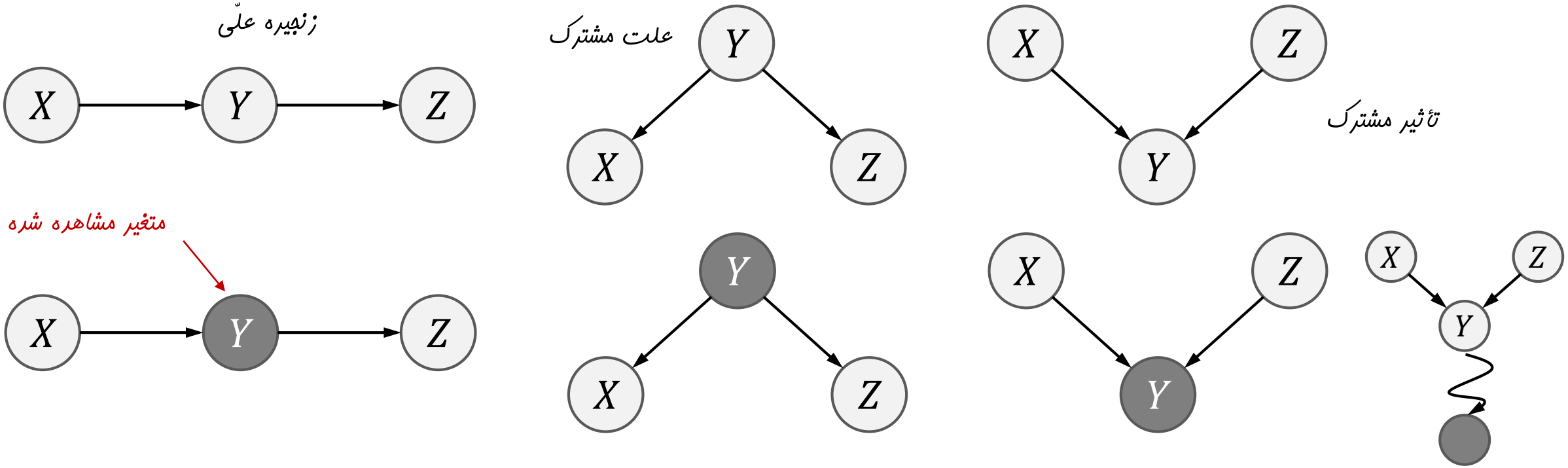
(b)

D-جدایی: طرح کلی



D-جدایی: طرح کلی

- مطالعه وابستگی و استقلال بر روی سه‌تایی‌ها.



- توجه. هر شبکه پیچیده را می‌توان تنها با استفاده از این سه حالت استاندارد تحلیل نمود.

زنجیره‌های علّی

- زنجیره علّی.

X: Low pressure *Y: Rain* *Z: Traffic*

$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Y|X)P(Z|Y)$$

- آیا X و Z ضرورتا مستقل هستند؟ خیر!
  - یک مجموعه از جداول توزیع شرطی که در آنها X از Z مستقل نیست، برای نشان دادن این که چنین استقلالی تضمین نشده کافیست.
- مثال. فشار پایین باعث ریزش باران و ریزش باران باعث ایجاد ترافیک می‌شود.

زنجیره‌های علّی

- زنجیره علّی.

X: Low pressure *Y: Rain* *Z: Traffic*

$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Y|X)P(Z|Y)$$

- آیا با دانستن Y، متغیرهای X و Z ضرورتا مستقل هستند؟ بله!

$$P(Z|X,Y) = \frac{P(X,Y,Z)}{P(X,Y)}$$

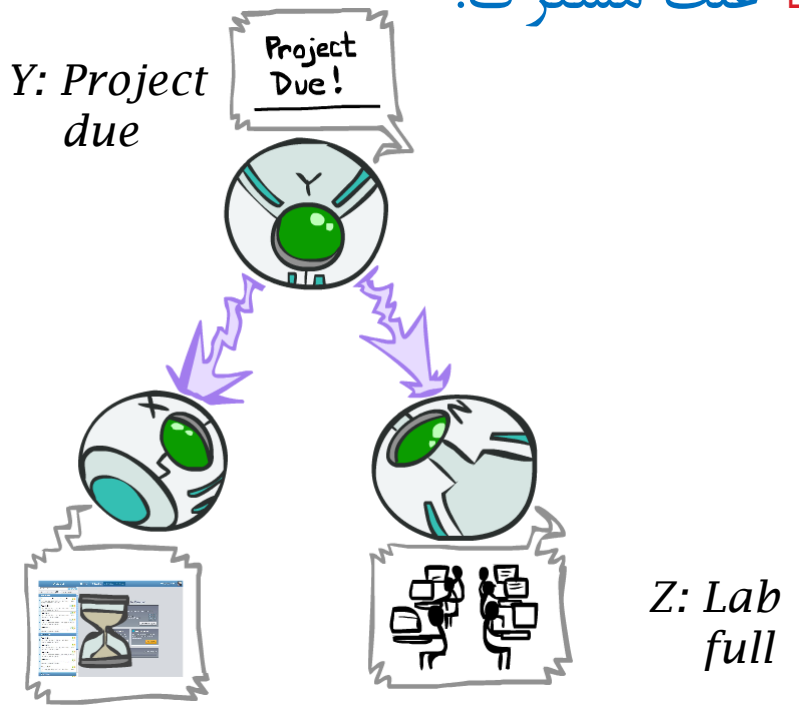
$$= \frac{P(X)P(Y|X)P(Z|Y)}{P(X)P(Y|X)}$$

$$= P(Z|Y)$$

- نتیجه. شواهد مانع از انتشار تاثیر در طول زنجیره می‌شود.

علت مشترک

- علت مشترک.

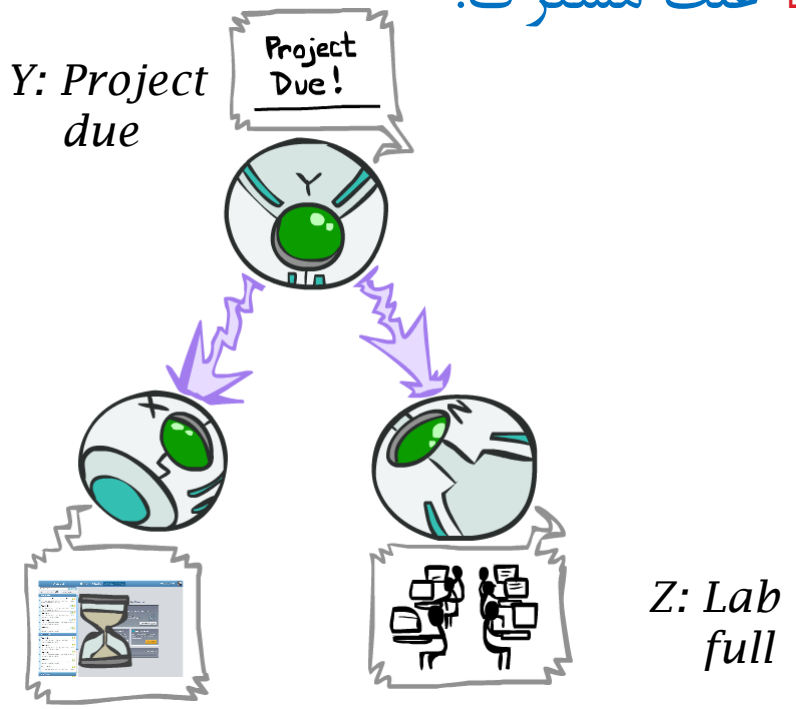


$$P(X,Y,Z) = P(Y)P(X|Y)P(Z|Y)$$

- آیا X و Z ضرورتا مستقل هستند؟ خیر!
  - یک مجموعه از جداول توزیع شرطی که در آنها X از Z مستقل نیست، برای نشان دادن این که چنین استقلالی تضمین نشده کافیست.
- مثال. سر رسیدن موعد تحویل پروژه هم باعث شلوغ شدن تالارهای گفتگو و هم باعث پر شدن آزمایشگاه می‌شود.

علت مشترک

- علت مشترک.



$$P(X,Y,Z) = P(Y)P(X|Y)P(Z|Y)$$

- آیا با دانستن Y، متغیرهای X و Z ضرورتا مستقل هستند؟ بله!

$$P(Z|X,Y) = \frac{P(Y,X,Z)}{P(Y,X)}$$

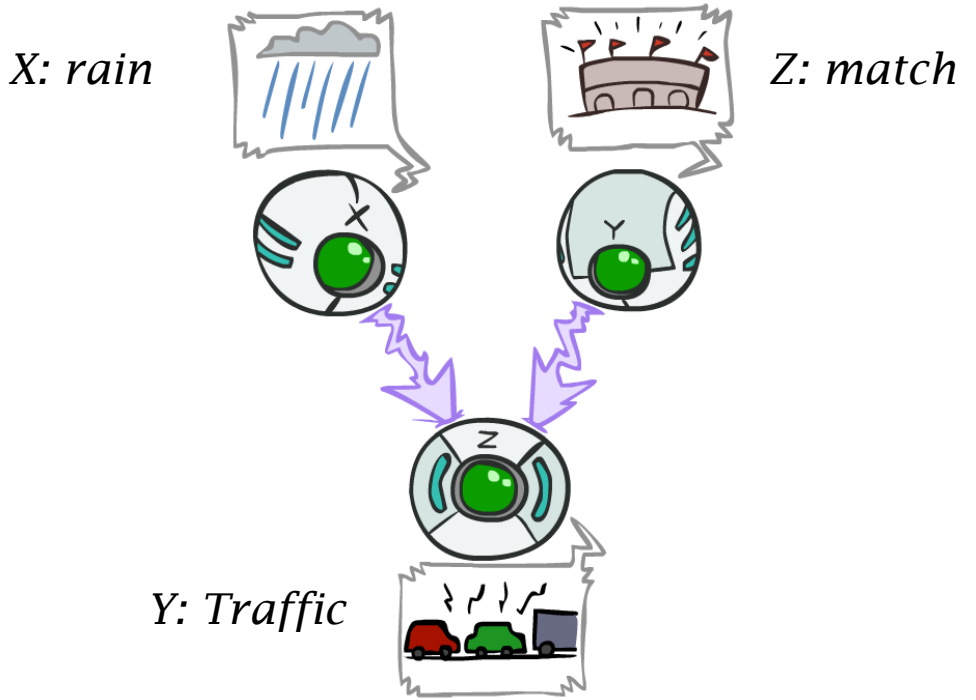
$$= \frac{P(Y)P(X|Y)P(Z|Y)}{P(Y)P(X|Y)}$$

$$= P(Z|Y)$$

- نتیجه. مشاهده علت مانع از انتشار تاثیر میان معلول‌ها می‌شود.

تأثیر مشترک

- تأثیر مشترک. [ساختار v]



$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Z)P(Y|X,Z)$$

- آیا X و Z ضرورتا مستقل هستند؟ بله!

- مثال. اگرچه بارندگی و برگزاری مسابقه فوتبال هر دو باعث ایجاد ترافیک می‌شوند، اما بین این دو همبستگی وجود ندارد.

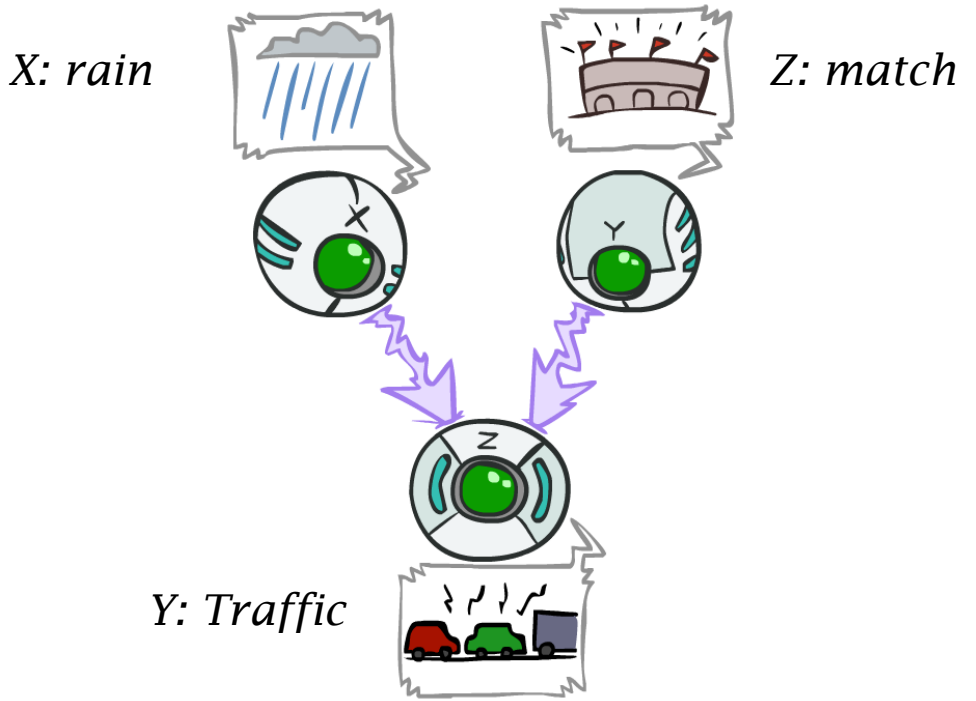
- اما این موضوع نیاز به اثبات دارد!

$$P(X,Z,Y) = P(X)P(Z)P(Y|X,Z)$$ شبکه بیز

$$P(X,Z,Y) = P(X)P(Z|X)P(Y|X,Z)$$ قاعده زنجیری

تأثیر مشترک

- تأثیر مشترک. [ساختار v]

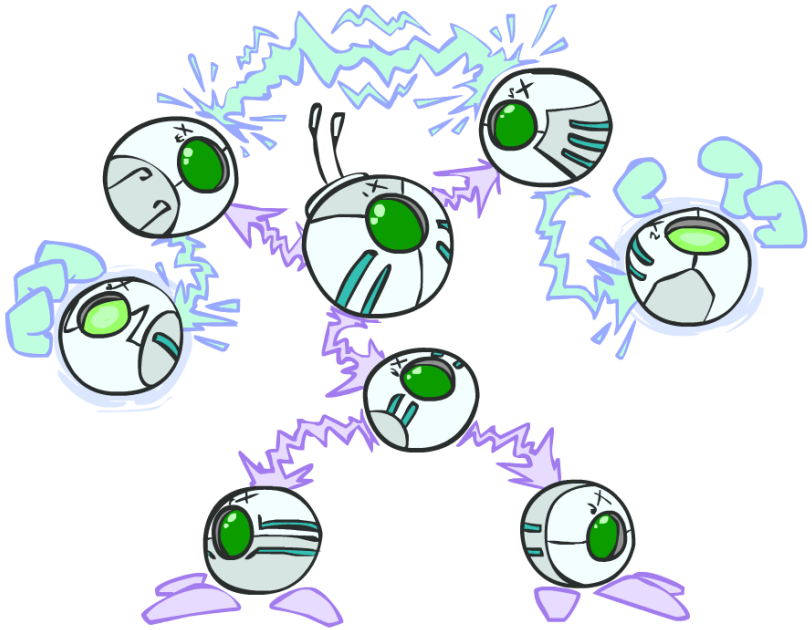


$$P(X,Y,Z) = P(X)P(Z)P(Y|X,Z)$$

- آیا با دانستن Y، متغیرهای X و Z ضرورتا مستقل هستند؟ خیر!
  - زیرا با دانستن این که ترافیک وجود دارد، اگر بدانیم مسابقه فوتبال برگزار می‌شود، آنگاه میزان باور ما نسبت به بارش باران کاهش می‌یابد و بالعکس.
  - به عبارت دیگر مشاهده ترافیک، باعث ایجاد رقابت بین بارندگی و برگزاری مسابقه به عنوان دو توضیح ممکن برای علت بروز ترافیک می‌شود.
- نتیجه. مشاهده معلول، باعث فعال شدن تأثیر میان علت‌های ممکن می‌شود.

حالت کلی

حالت کلی

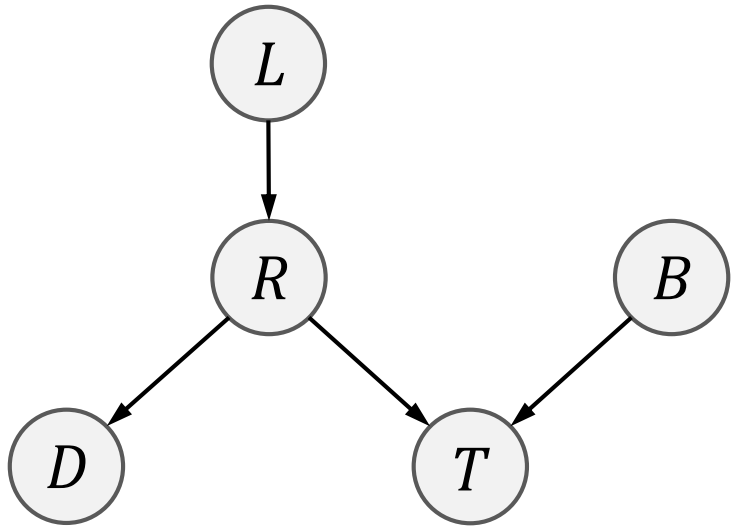


- پرسش. در یک شبکه بیز داده شده، آیا دو متغیر مفروض مستقل هستند؟ [با توجه به شواهد]

- راه‌حل. تحلیل گراف!

- هر شبکه پیچیده را می‌توان تنها با استفاده از سه حالت استاندارد تحلیل نمود.

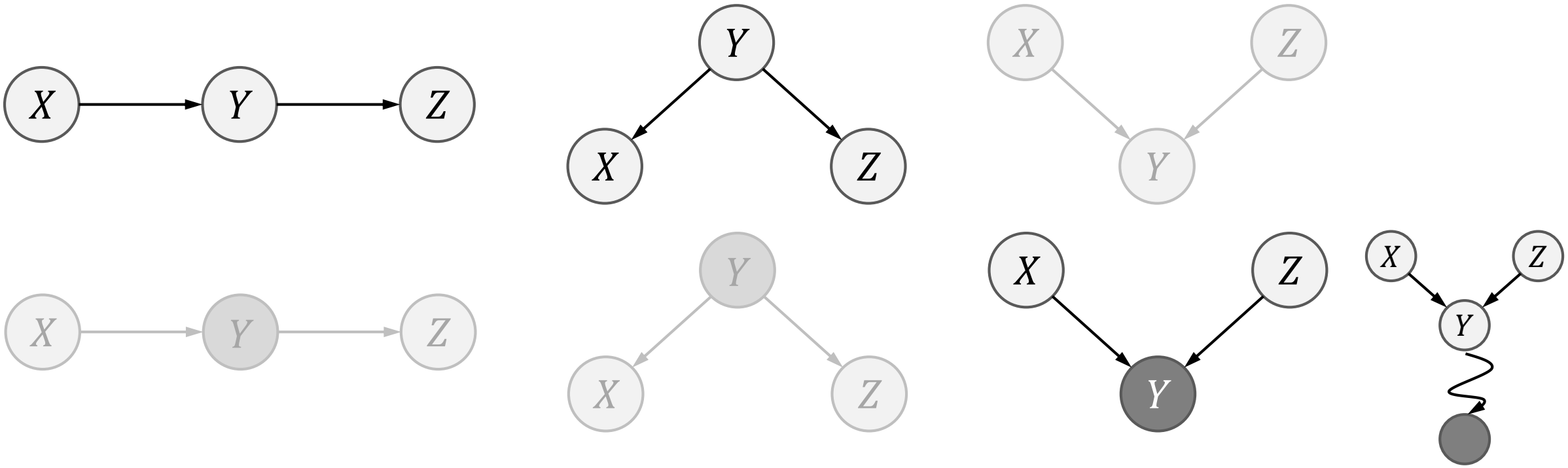
دسترس‌پذیری



- دستورالعمل.
  - متغیرهای مشاهده شده را سایه بزن،
  - در گراف حاصل به دنبال مسیرهای ممکن بگرد.
- تلاش اول. اگر دو رأس مورد نظر به وسیله یک مسیر بدون جهت که با هیچ رأس سایه‌داری مسدود نشده است به هم وصل باشند، آنگاه آن دو رأس مستقل شرطی هستند.
- یک استثنا. ساختار v
  - ساختار v موجود در رأس T به عنوان یک پیوند در مسیر در نظر گرفته نمی‌شود، مگر این که فعال باشد.

D-جدایی: طرح کلی

- سه‌تایی‌های فعال.



- سه‌تایی‌های فعال. سه‌تایی (X, Y, Z) یک سه‌تایی فعال است اگر با توجه به شواهد موجود، متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل نباشند.

حالت کلی: جدایی D

- مسیر فعال. مسیر بدون جهت $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ با دانستن شواهد، یک مسیر فعال است اگر هر سه‌تایی موجود در آن به صورت (X_{-1}, X_0, X_{+1}) یک سه‌تایی فعال باشد.

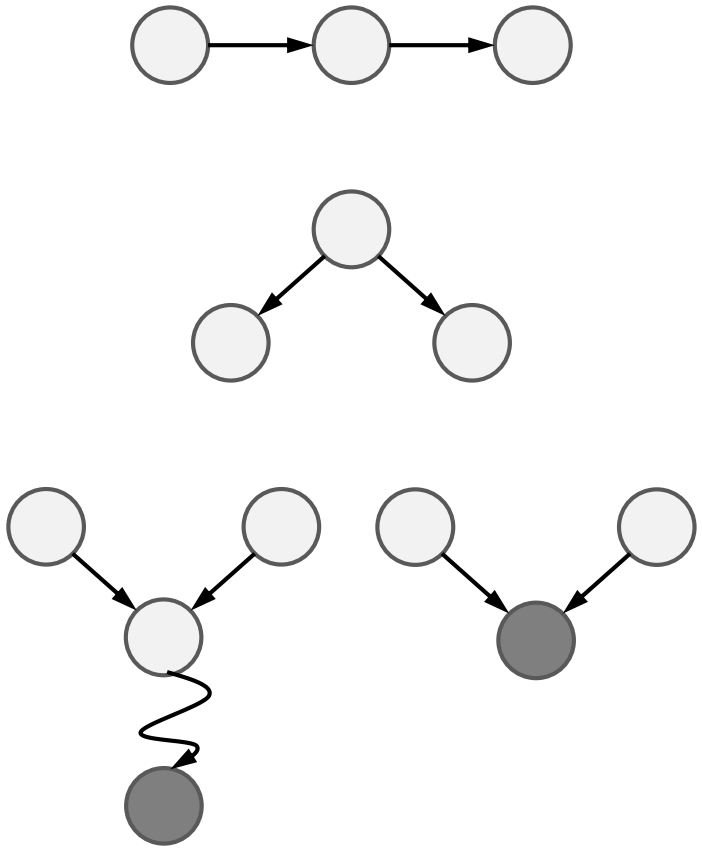
- گزاره. متغیرهای X و Z ضرورتاً مستقل نیستند اگر حداقل یک مسیر فعال بین آنها وجود داشته باشد (با دانستن شواهد).

- یک گزاره معادل. متغیرهای X و Z مستقل هستند اگر تمام مسیرهای بین آنها غیرفعال باشد (با دانستن شواهد).

- توجه. برای بررسی استقلال متغیرها تنها لازم است ساختار گراف تحلیل شود و به جداول توزیع شرطی نیازی نیست.

دسترس‌پذیری (جدایی-D)

- س. آیا با داشتن شواهد $\{Z\}$، متغیرهای X و Y مستقل شرطی هستند؟
  - بله، اگر X و Y به وسیله Z جدا شده باشند.
  - به دنبال مسیرهای فعال میان X و Y بگرد.
  - عدم وجود مسیر فعال = استقلال!



سه‌تایی‌های فعال

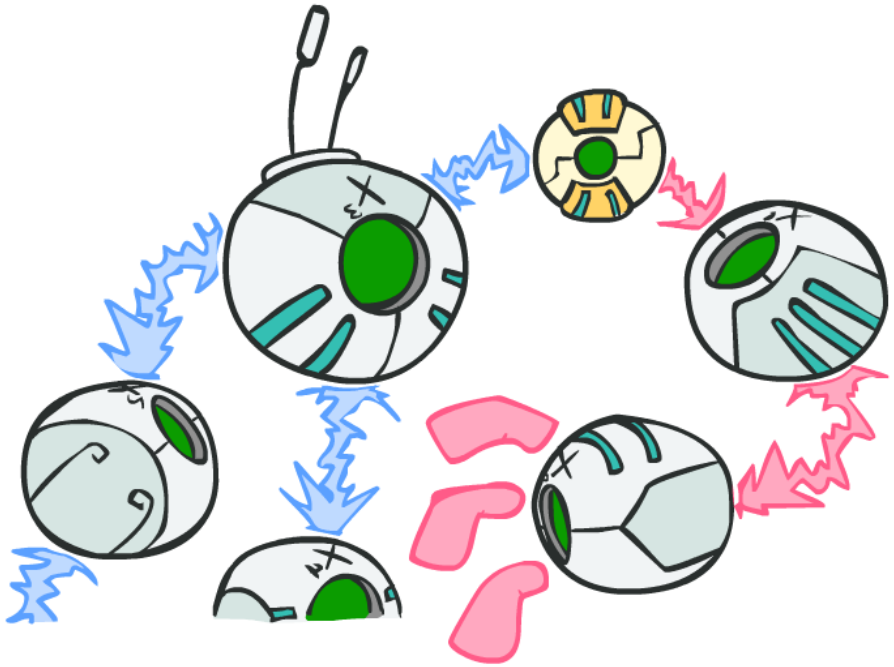
- مسیر فعال. همه سه‌تایی‌های موجود در مسیر فعال هستند.
  - زنجیره علّی $A \to B \to C$ اگر B مشاهده نشده باشد.
  - علت مشترک $A \leftarrow B \to C$ اگر B مشاهده نشده باشد.
  - تأثیر مشترک $A \to B \leftarrow C$ اگر B یا یکی از نسلهایش مشاهده شده باشد.

- توجه. وجود تنها یک بخش غیرفعال در مسیر، مسیر را غیرفعال می‌سازد.

D-جدایی

- پرس و جو.

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$$

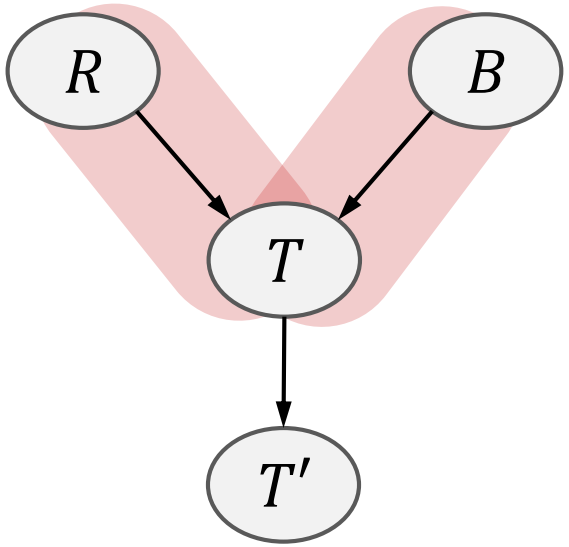


- گره‌های مشاهده شده را علامت بزن.
- تمام مسیرهای موجود میان X_i و X_j، بررسی کن.

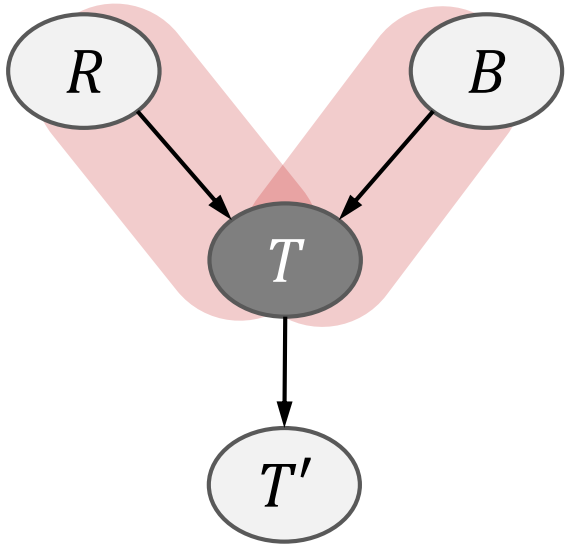
[بدون در نظر گرفتن جهت مسیر]

  - اگر حداقل یک مسیر فعال پیدا شد، آنگاه $X_i \not\perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$.
  - اگر هیچ مسیر فعالی پیدا نشد، آنگاه $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$.

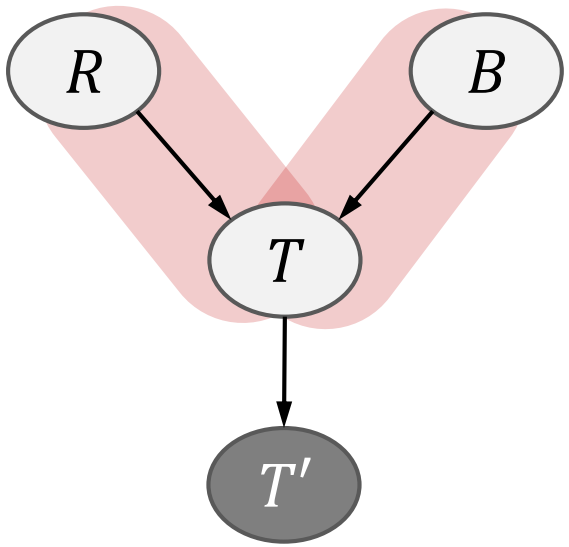
مثال



$R \perp B$

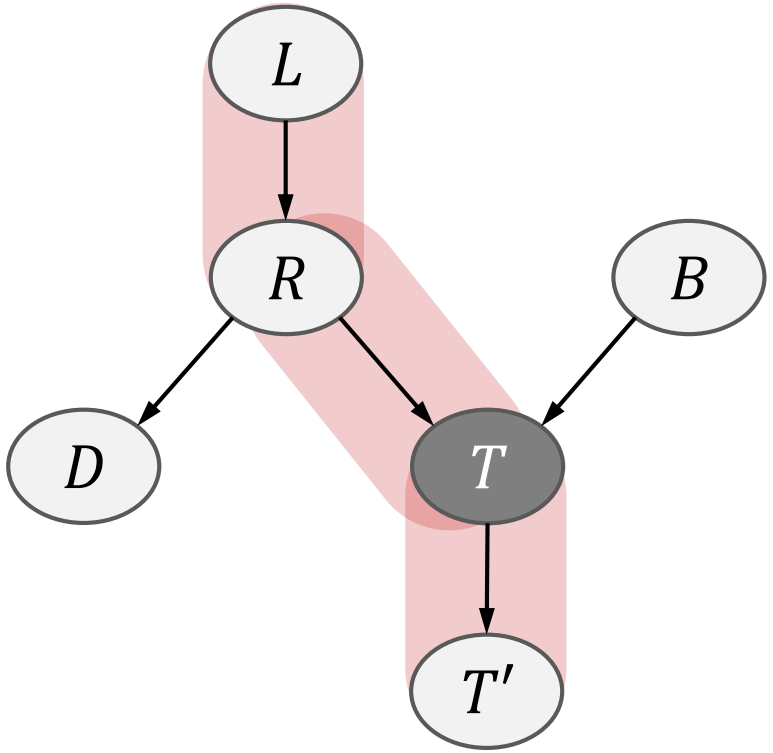


$R \perp B \mid T$

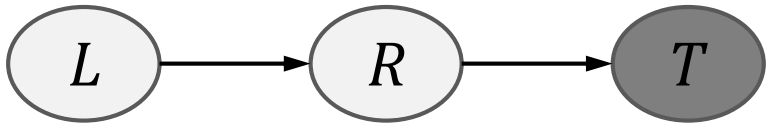


$R \perp B \mid T'$

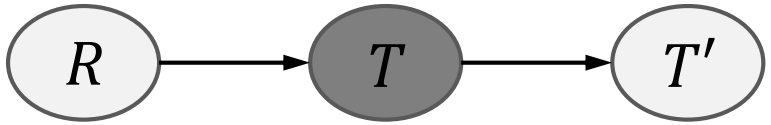
مثال



$L \perp T' | T$

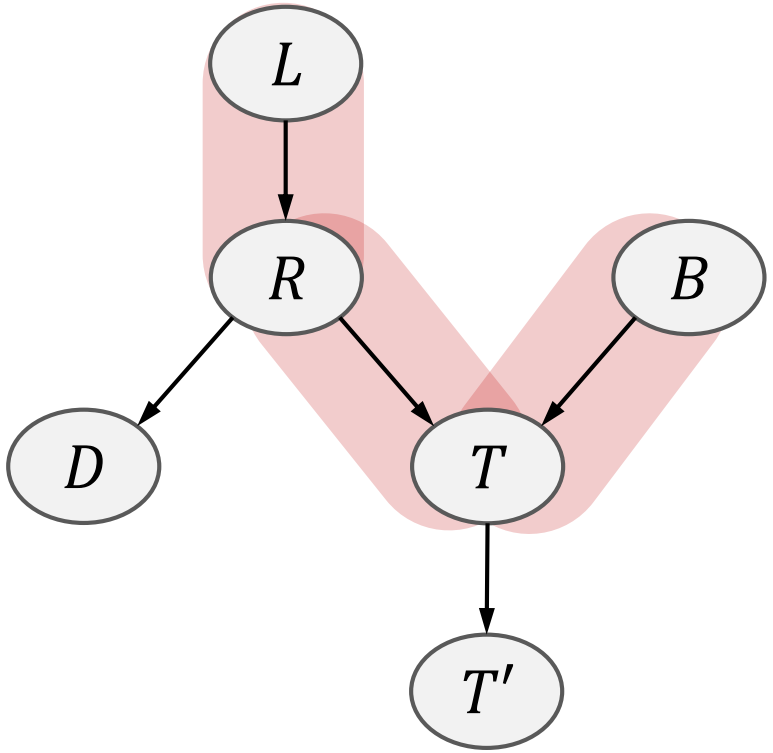


فعال

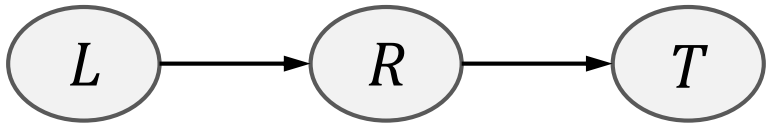


غیرفعال

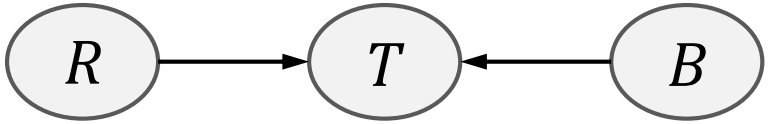
مثال



$L \perp B$

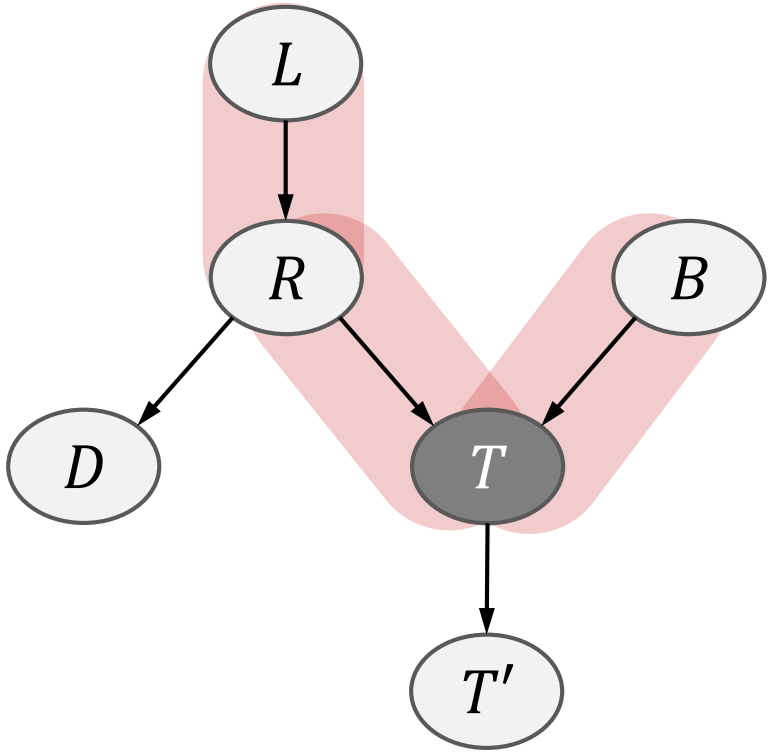


فعال

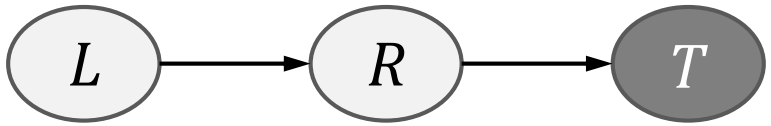


غیرفعال

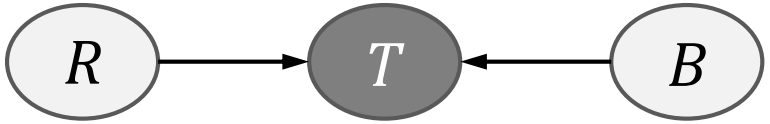
مثال



$L \perp B|T$

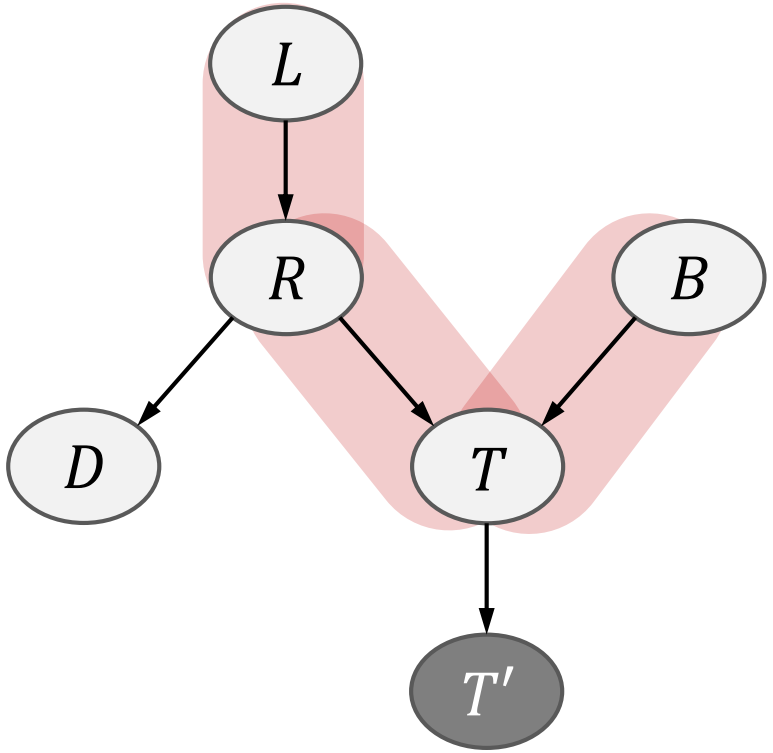


فعال

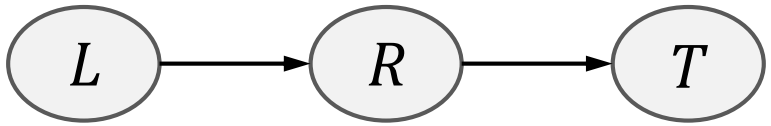


فعال

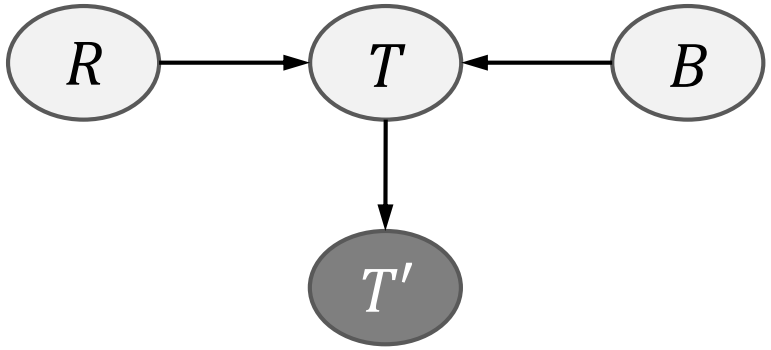
مثال



$L \perp B | T'$

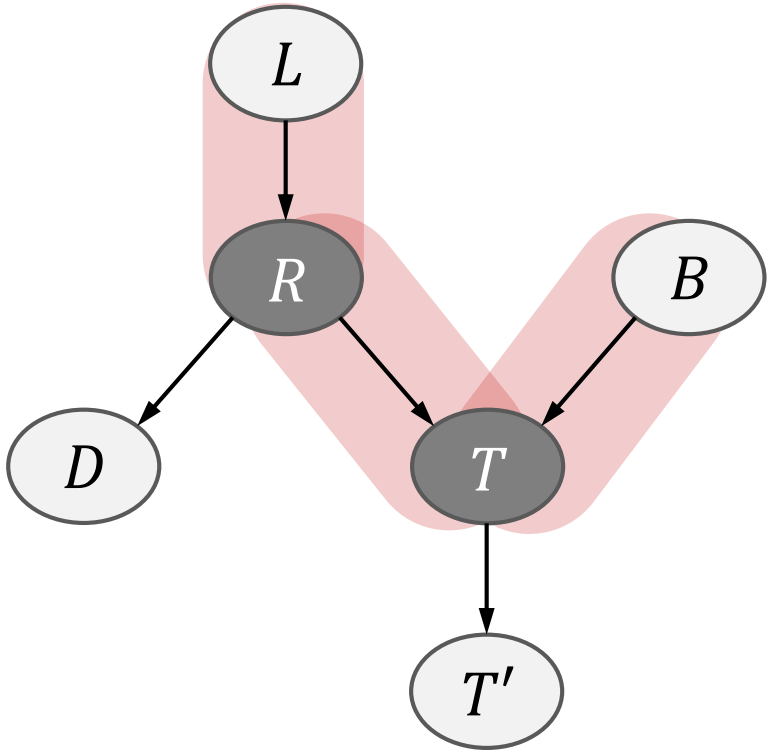


فعال



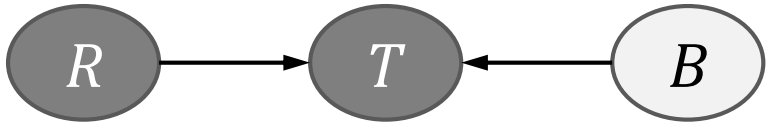
فعال

مثال



$$L \perp B | T, R$$

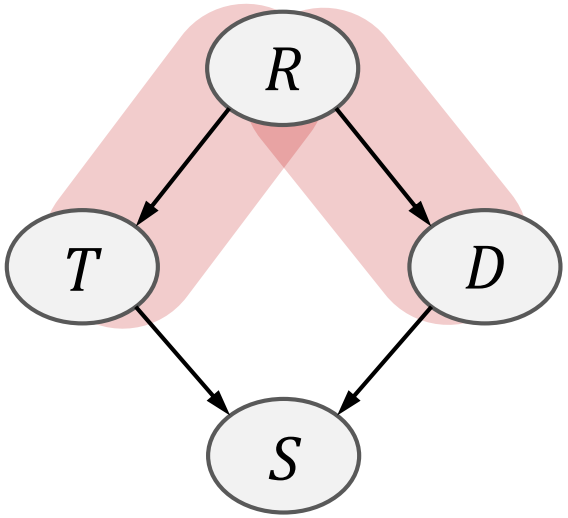
غیرفعال

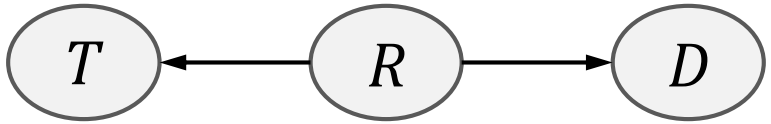


فعال

مثال

$T \perp D$



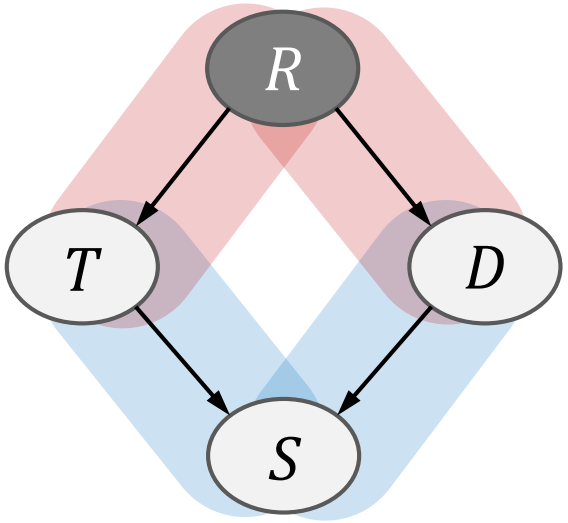


فعال

- خیر. زیرا یک مسیر فعال بین T و D وجود دارد.

مثال

$T \perp D \mid R$



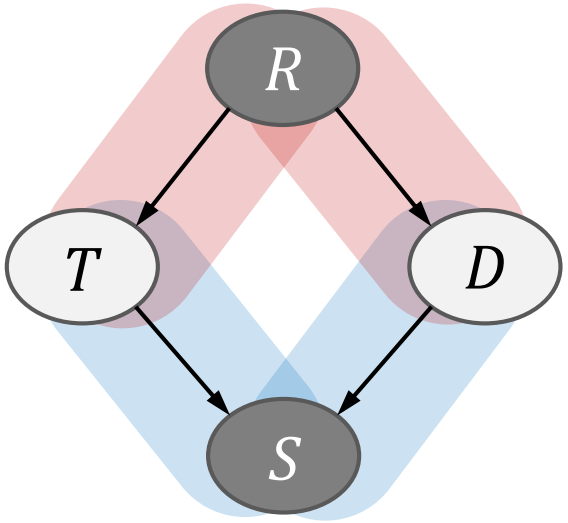
غیرفعال

غیرفعال

- بله. زیرا همه مسیرهای بین T و D غیر فعال هستند.

مثال

$$T \perp D \mid R, S$$

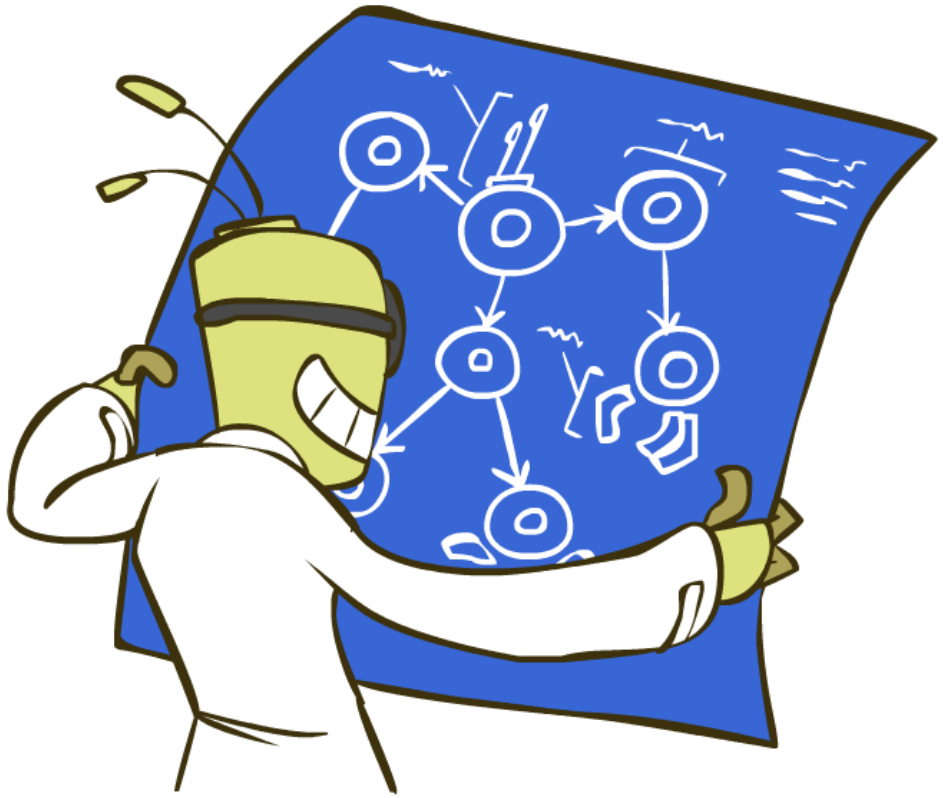


غیرفعال

فعال

- خیر. زیرا یک مسیر فعال بین T و D وجود دارد. [مسیر $T \rightarrow S \leftarrow D$]

تعیین استقلال‌های شرطی



- با داشتن یک شبکه بیز، می‌توان یک لیست کامل از تمامی استقلال‌های شرطی به صورت زیر ایجاد نمود:

$$X_i \perp X_j \mid \{X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_n}\}$$

- این لیست بیانگر مجموعه تمام توزیع‌های احتمالاتی است که به وسیله شبکه بیز قابل بازنمایی هستند.